

УДК 538.4

Ю. И. Малов, Л. К. Мартинсон, К. Б. Павлов

## ПРИМЕНЕНИЕ БЕСКОНЕЧНЫХ СИСТЕМ К РЕШЕНИЮ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ ПРОВОДЯЩИХ СРЕД

Рассматривается класс краевых задач магнитной гидродинамики, решение которых может быть сведено к бесконечным системам линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложений в ряды Фурье искомого решения краевых задач. Ил. 3, библиогр. 22.

Рассматривается установившееся ламинарное течение вязкой несжимаемой среды с изотропной проводимостью в канале, находящемся в поперечном однородном магнитном поле  $B_0$ . Движение жидкости происходит в направлении оси  $z$  под действием постоянного градиента давления  $P = -\partial p/\partial z = \text{const} > 0$ .

Уравнения магнитной гидродинамики, описывающие течение проводящей среды в канале, сводятся к системе уравнений для двух функций  $v_z = PL^2 \eta_*^{-1} u$  и  $B_z = PL^2 \mu_0 (\sigma_*/\eta_*)^{1/2} B$ , соответствующих распределениям в канале осевой скорости и индуцированного магнитного поля [1]:

$$\begin{cases} \operatorname{div} (\eta \operatorname{grad} u) + \text{Ha} \frac{\partial B}{\partial x} = -1; \\ \operatorname{div} \left( \frac{1}{\sigma} \operatorname{grad} B \right) + \text{Ha} \frac{\partial u}{\partial x} = 0; \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{Ha} = B_0 L \left( \frac{\sigma_*}{\eta_*} \right)^{1/2}, \quad \sigma = \frac{\sigma_c}{\sigma_*}, \quad \eta = \frac{\eta_c}{\eta_*};$$

$$\sigma_c = \text{var}, \quad \eta_c = \text{var}.$$

Здесь  $\mathbf{v} \{0, 0, v_z\}$ ,  $\mathbf{B} \{B_0, 0, B_z\}$  — векторы скорости и магнитной индукции,  $\text{Ha}$  — число Гартмана,  $\sigma_*$  и  $\eta_*$  — характерные значения электропроводности и коэффициента динамической вязкости жидкости,  $\mu_0$  — магнитная постоянная,  $L$  — характерный масштаб длины.

Система уравнений (1) должна быть решена с учетом условий для  $u$  и  $B$  на границе области течения жидкости  $\Omega$ :  $u=0$  — на стенках канала;  $B + \Theta \partial B/\partial n = 0$  — на участках контура  $\partial\Omega$ , граничащих со стенками канала, обладающими произвольной проводимостью (безразмерный параметр  $\Theta$  характеризует электропроводность участков стенок канала);  $B=0$  и  $\partial B/\partial n = 0$  на участках  $\partial\Omega$ , граничащих соответственно с непроводящими и идеально проводящими стенками [1].

При расчете стационарных течений проводящей среды с постоянными коэффициентами переноса  $\sigma$  и  $\eta$  в каналах распределения скорости движения жидкости  $u$  и индуцированного магнитного поля  $B$  могут быть представлены в виде разложений в ряды Фурье. В некоторых простых случаях задания граничных условий для магнитного поля коэффициенты этих рядов выражаются в явном виде [1]. В более общих постановках краевых задач, описывающих стационарные течения в каналах, коэффициенты разложений искомого решения в ряды в конечной форме найти не удается. Однако в ряде случаев определение этих коэффициентов приводит к решению бесконечных систем. Ниже приводится класс краевых задач магнитной гидродинамики о стационарных течениях про-

дящих сред в каналах, решение которых может быть сведено к бесконечным системам линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложений в ряды Фурье искомым решением краевых задач, причем для бесконечных систем возможно обоснование метода их решения (например, метод последовательных приближений, итераций, редукции [2]).

При исследовании течений проводящих сред в каналах возникает необходимость рассмотрения задач со смешанными краевыми условиями. Такие задачи описывают, в частности, течения в каналах прямоугольного сечения с секционированными стенками, выполненными из материалов с различной электропроводностью. Решения этих задач представляются в форме тригонометрических рядов и удовлетворяют смешанным краевым условиям для индуцированного магнитного поля [3, 4] или для потенциала при решении задач в безындукционном приближении [5—7], а определение коэффициентов рядов приводит к бесконечным системам.

Кроме того, появление бесконечных систем относительно коэффициентов разложений в ряды решений краевых задач может быть связано с неортогональностью собственных функций [8—10].

Отметим, что в работах [3, 4, 10] для решения бесконечных систем проведено обоснование метода редукции, состоящего в том, что приближенные значения решений этих систем определяются из соответствующих усеченных систем. При этом если в работе [10] доказательство редукции основано на свойствах матричных элементов бесконечных систем, то в [3, 4] это доказательство проведено на основании свойств уравнений магнитной гидродинамики и соответствующих смешанных граничных условий. В работе [8] для решения бесконечных систем предложен метод последовательных приближений, а в [9] — метод итераций. Решение бесконечных систем в [5, 6] проведено на основе регулярности этих систем при определенных значениях параметров задачи.

**Стационарные МГД-течения в каналах с переменной проводимостью стенок.** Сведением к бесконечным системам решаются задачи о течении проводящей среды в каналах, проводимость стенок которых  $\sigma_w$  изменяется вдоль границы  $\partial\Omega$ , т. е. когда коэффициент  $\Theta$  в приближенном условии Шерклифа [11]

$$B + \Theta \frac{\partial B}{\partial n} = 0, \quad \Theta = \frac{\sigma_w}{\sigma_c} \frac{d}{L},$$

где  $\mathbf{n}$  — внешняя нормаль к  $\partial\Omega$  — является функцией координаты границы.

1. В качестве примера рассмотрим течение в круглой трубе, находящейся в поперечном однородном магнитном поле  $B_0$ . Полагая, что вязкость и проводимость среды постоянны, запишем уравнения магнитной гидродинамики (1) в цилиндрической системе координат в области  $\Omega\{0 \leq r \leq 1, -\pi < \varphi < \pi\}$ :

$$\Delta u + \text{Ha} \left( \frac{\partial B}{\partial r} \cos \varphi - \frac{\partial B}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi}{r} \right) = -1; \quad (2)$$

$$\Delta B + \text{Ha} \left( \frac{\partial u}{\partial r} \cos \varphi - \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi}{r} \right) = 0;$$

$$\Delta \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2},$$

где осевая скорость  $u(r, \varphi)$  и индуцированное магнитное поле  $B(r, \varphi)$  удовлетворяют следующим условиям на границе области  $\partial\Omega$ :

$$u=0, \quad B+\Theta(\varphi)\frac{\partial B}{\partial r}=0 \quad \text{при } r=1. \quad (3)$$

Для простоты изложения будем считать, что функция  $\Theta(\varphi)$  является четной относительно  $\varphi=0$ . Тогда распределения скорости жидкости  $u(r, \varphi)$  и индуцированного магнитного поля  $B(r, \varphi)$ , удовлетворяющие условию периодичности по  $\varphi$ , можно найти методом разделения переменных из (2) в виде следующих разложений:

$$\begin{aligned} u(r, \varphi) = & \exp\left(-\frac{\text{Ha}}{2} r \cos \varphi\right) \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{I_k(1/2 \text{Ha} r)}{I_k(1/2 \text{Ha})} \cos k\varphi + \\ & + \exp\left(\frac{\text{Ha}}{2} r \cos \varphi\right) \sum_{k=0}^{\infty} b_k \frac{I_k(1/2 \text{Ha} r)}{I_k(1/2 \text{Ha})} \cos k\varphi; \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} B(r, \varphi) = & -\frac{r \cos \varphi}{\text{Ha}} + \exp\left(-\frac{\text{Ha}}{2} r \cos \varphi\right) \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{I_k(1/2 \text{Ha} r)}{I_k(1/2 \text{Ha})} \cos k\varphi - \\ & - \exp\left(\frac{\text{Ha}}{2} r \cos \varphi\right) \sum_{k=0}^{\infty} b_k \frac{I_k(1/2 \text{Ha} r)}{I_k(1/2 \text{Ha})} \cos k\varphi. \end{aligned}$$

Укажем способ отыскания коэффициентов  $a_k$  и  $b_k$  этих разложений. Подставляя выражения для  $u(r, \varphi)$  и  $B(r, \varphi)$  из (4) в граничные условия (3), после элементарных преобразований приходим к соотношениям

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos k\varphi + \exp(\text{Ha} \cos \varphi) \sum_{k=0}^{\infty} b_k \cos k\varphi = 0; \quad (5)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos k\varphi - \exp(\text{Ha} \cos \varphi) \sum_{k=0}^{\infty} b_k \cos k\varphi + \\ & + \Theta(\varphi) \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} a_k \omega_k \cos k\varphi - \exp(\text{Ha} \cos \varphi) \sum_{k=0}^{\infty} b_k \omega_k \cos k\varphi \right\} = F(\varphi); \end{aligned}$$

$$F(\varphi) = \frac{1}{\text{Ha}} \{1 + \Theta(\varphi)\} \cos \varphi \exp\left(\frac{\text{Ha}}{2} \cos \varphi\right); \quad \omega_k = \frac{\text{Ha}^2}{4} \frac{I_k'(1/2 \text{Ha})}{I_k(1/2 \text{Ha})}.$$

Складывая равенства в (5), получим

$$2 \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos k\varphi + \Theta(\varphi) \sum_{k=0}^{\infty} a_k \omega_k \cos k\varphi + Z(\varphi) \sum_{k=0}^{\infty} b_k \omega_k \cos k\varphi = F(\varphi); \quad (6)$$

$$Z(\varphi) = -\Theta(\varphi) \exp(\text{Ha} \cos \varphi).$$

Введем в рассмотрение вспомогательные функции

$$\Phi(\varphi) = \Theta(\varphi) \sum_{k=0}^{\infty} a_k \omega_k \cos k\varphi; \quad \Psi(\varphi) = Z(\varphi) \sum_{k=0}^{\infty} b_k \omega_k \cos k\varphi. \quad (7)$$

Так как  $F(\varphi)$ ,  $\Phi(\varphi)$  и  $\Psi(\varphi)$  являются четными функциями, то их разложения в тригонометрические ряды в интервале  $-\pi \leq \varphi \leq \pi$  представляются в виде

$$\begin{aligned} F(\varphi) &= \sum_{k=1}^{\infty} v_k \cos k\varphi + \frac{v_0}{2}; \\ \Phi(\varphi) &= \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k \cos k\varphi + \frac{\Phi_0}{2}; \\ \Psi(\varphi) &= \sum_{k=1}^{\infty} \Psi_k \cos k\varphi + \frac{\Psi_0}{2}. \end{aligned} \quad (8)$$

Тогда на основании (7) и (8) из соотношения (6) имеем

$$\begin{aligned} 2a_0 + \frac{\Phi_0 + \Psi_0}{2} &= \frac{v_0}{2}; \\ 2a_k + \Phi_k + \Psi_k &= v_k, \quad k=1, 2, \dots \end{aligned} \quad (9)$$

Будем считать, что  $\Theta(\varphi)$ ,  $Z(\varphi)$  и функции, определяемые рядами

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \omega_k \cos k\varphi, \quad \sum_{k=0}^{\infty} b_k \omega_k \cos k\varphi,$$

принадлежат к классу функций, интегрируемых с квадратом и удовлетворяющих обобщенному равенству Парсеваля [12].

Если  $\vartheta_k$  и  $\xi_k$  — соответственно коэффициенты Фурье известных четных в интервале  $-\pi < \varphi < \pi$  функций  $\Theta(\varphi)$  и  $Z(\varphi)$

$$\vartheta_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \Theta(\varphi) \cos k\varphi d\varphi, \quad \xi_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} Z(\varphi) \cos k\varphi d\varphi,$$

то для коэффициентов  $\Phi_k$  и  $\Psi_k$  разложений (8) на основании правила умножения рядов Фурье могут быть записаны формулы [12]

$$\begin{aligned} \Phi_k &= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\infty} a_j \omega_j (\vartheta_{k-j} + \vartheta_{k+j}); \\ \Psi_k &= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\infty} b_j \omega_j (\xi_{k-j} + \xi_{k+j}), \end{aligned} \quad k=0, 1, 2, \dots, \quad (10)$$

причем в (10) следует считать, что  $\vartheta_n = \vartheta_{-n}$ ,  $\xi_n = \xi_{-n}$ .

Теперь, учитывая (10), из (9) получим

$$a_k + \sum_{j=0}^{\infty} a_j \omega_j (\vartheta_{k-j} + \vartheta_{k+j}) \frac{1}{4} + \\ + \sum_{j=0}^{\infty} b_j \omega_j (\xi_{k-j} + \xi_{k+j}) \frac{1}{4} = \frac{\nu_k}{2}, \quad k=0, 1, 2, \dots \quad (11)$$

Отметим, что если функции  $u(r, \varphi)$  и  $B(r, \varphi)$  в (4) будут удовлетворять условиям симметрии

$$u\left(r, \pm \frac{\pi}{2} - \alpha\right) = u\left(r, \pm \frac{\pi}{2} + \alpha\right), \quad B\left(r, \pm \frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -B\left(r, \pm \frac{\pi}{2} + \alpha\right),$$

то между коэффициентами  $a_k$  и  $b_k$ , очевидно, имеет место связь

$$(-1)^{k+1} a_k + b_k = 0. \quad (12)$$

Заменяя в (11)  $b_j$  на  $(-1)^j a_j$ , приходим к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов  $a_k$ :

$$a_k + \sum_{j=0}^{\infty} a_j \frac{\omega_j}{4} \{(\vartheta_{k-j} + \vartheta_{k+j}) + (-1)^j (\xi_{k-j} + \xi_{k+j})\} = \frac{\nu_k}{2}, \quad k=0, 1, 2, \dots \quad (13)$$

Исследуем возможность редукции бесконечной системы (13). Известно [13], что

$$\zeta I_n'(\zeta) = n I_n(\zeta) + \zeta I_{n+1}(\zeta),$$

поэтому

$$\frac{I_n'(\zeta)}{I_n(\zeta)} = \frac{n}{\zeta} + \frac{I_{n+1}(\zeta)}{I_n(\zeta)}.$$

Так как при фиксированном значении  $\zeta$  для любого целого  $n$

$$\frac{I_{n+1}(\zeta)}{I_n(\zeta)} < 1,$$

то

$$\omega_n = O(n) \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Обозначая через  $A_{kj}$  матричные элементы системы (13)

$$A_{kj} = \frac{\omega_j}{4} \{ \vartheta_{k-j} + \vartheta_{k+j} + (-1)^j (\xi_{k-j} + \xi_{k+j}) \}, \quad (14)$$

перепишем эту систему в форме

$$a_k + \sum_{j=0}^{\infty} C_{kj} a_j = g_k, \quad k=0, 1, 2, \dots, \quad (15)$$

$$C_{kj} = \begin{cases} A_{kj}(1+A_{kk})^{-1} & \text{при } k \neq j, \\ 0 & \text{при } k = j, \end{cases}$$

$$g_k = \frac{\nu_k}{2} (1+A_{kk})^{-1}.$$

Согласно (14) для матричных элементов  $C_{kj}$  бесконечной системы (15) следует, что

$$\sum_{k, j} |C_{kj}|^2 \leq \text{const} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sum_{j=0}^{\infty} (|R_{kj}|^2 + |Q_{kj}|^2),$$

где

$$R_{kj} = j(\vartheta_{k-j} + \vartheta_{k+j}), \quad Q_{kj} = j(\xi_{k-j} + \xi_{k+j}).$$

Так как

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} |R_{kj}|^2 &\leq \text{const} \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} |(k-j)\vartheta_{k-j}|^2 + \sum_{j=1}^{\infty} |(k+j)\vartheta_{k+j}|^2 \right\} \leq \\ &\leq \text{const} \left( \sum_{m=-\infty}^{k-1} |m\vartheta_m|^2 + \sum_{m=k+1}^{\infty} |m\vartheta_m|^2 \right) \leq \text{const} \sum_{m=1}^{\infty} |m\vartheta_m|^2 \end{aligned}$$

и аналогично

$$\sum_{j=0}^{\infty} |Q_{kj}|^2 \leq \text{const} \sum_{m=1}^{\infty} |m\xi_m|^2,$$

то справедлива оценка

$$\sum_{k, j} |C_{kj}|^2 \leq \text{const} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \left( \sum_{m=1}^{\infty} |m\vartheta_m|^2 + \sum_{m=1}^{\infty} |m\xi_m|^2 \right). \quad (16)$$

Если функция  $\Theta(\varphi)$  непрерывна в интервале  $(-\pi, +\pi)$ , то по крайней мере

$$\begin{aligned} \vartheta_m &= O(m^{-2}) \text{ при } m \rightarrow \infty, \\ \xi_m &= O(m^{-2}) \text{ при } m \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Это означает, что ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} (|m\vartheta_m|^2 + |m\xi_m|^2)$$

сходится и, следовательно, сходится в двойной ряд (16), т. е.

$$\sum_{k, j} |C_{kj}|^2 < \infty. \quad (17)$$

Очевидно, что для свободных членов  $g_k$  системы (15) выполняется неравенство

$$\sum_{k=0}^{\infty} |g_k|^2 < \infty. \quad (18)$$

Оценки (17) и (18) позволяют [14] для нахождения  $a_k$  из бесконечной системы (15), удовлетворяющих условию

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 < \infty,$$

применить метод редукции, т. е. приближенные значения этих коэффициентов  $a_k^*$  находить из усеченной системы

$$a_k^* + \sum_{j=0}^N C_{kj} a_j^* = g_k, \quad k=0, 1, 2, \dots, N,$$

причем имеет место сходимость приближенных значений  $a_k^*$  к точным  $a_k$  при  $N \rightarrow \infty$ .

Обоснование редукции для случая, когда  $\Theta(\varphi)$  — кусочно-гладкая функция, имеющая разрывы первого рода в интервале  $(-\pi, +\pi)$ , может быть проведено подобно тому, как это будет сделано в следующем примере для аналогичной бесконечной системы.

Таким образом, строгое решение краевой задачи (2), (3) для произвольной четной функции  $\Theta(\varphi)$  с учетом (4) и (12) представляется выражениями

$$\begin{aligned} u(r, \varphi) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left\{ \exp\left(-\frac{\text{Ha}}{2} r \cos \varphi\right) + (-1)^k \exp\left(\frac{\text{Ha}}{2} r \cos \varphi\right) \right\} \times \\ &\quad \times \frac{I_k(1/2 \text{ Ha } r)}{I_k(1/2 \text{ Ha})} \cos k\varphi; \\ B(r, \varphi) &= -\frac{r \cos \varphi}{\text{Ha}} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left\{ \exp\left(-\frac{\text{Ha}}{2} r \cos \varphi\right) + \right. \\ &\quad \left. + (-1)^{k+1} \exp\left(\frac{\text{Ha}}{2} r \cos \varphi\right) \right\} \frac{I_k(1/2 \text{ Ha } r)}{I_k(1/2 \text{ Ha})} \cos k\varphi \end{aligned}$$

с коэффициентами  $a_k$ , удовлетворяющими бесконечной системе (15), для решения которой применим метод редукции.

Следует отметить, что найденная форма решения этой краевой задачи позволяет записать решения известных задач, полагая для этого соответственно  $\Theta(\varphi) = \Theta_0 = \text{const} \neq 0$  и  $\Theta(\varphi) \equiv 0$ .

При  $\Theta = \Theta_0$  получается решение задачи о течении в канале, стенки которого обладают постоянной проводимостью [9]. В этом случае в бесконечной системе (15) необходимо положить  $\vartheta_0 = 2\Theta_0$  и  $\vartheta_k = 0$ , а

$$\xi_k = \frac{2\Theta_0}{\pi} \int_0^{\pi} \exp(\text{Ha} \cos \varphi) \cdot \cos k\varphi d\varphi = 2\Theta_0 I_k(\text{Ha}).$$

При  $\Theta = 0$  решение задачи о течении в круглой трубе с непроводящими стенками рассматривалось в работах [15, 16]. Так как в этом случае  $\vartheta_k = 0$ ,  $\xi_k = 0$  при  $k=0, 1, \dots$ , то матрица бесконечной системы (15)

обращается в диагональную ( $A_{kj} \equiv 0$ ). Поэтому могут быть выписаны из (15) значения  $a_k$  в явном виде

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} F(\varphi) \cos k\varphi d\varphi = \frac{1}{2 \text{Ha}} \left[ I_{k-1} \left( \frac{\text{Ha}}{2} \right) + I_{k+1} \left( \frac{\text{Ha}}{2} \right) \right],$$

$$k=0, 1, 2, \dots$$

Рассмотренная краевая задача (2), (3) с переменной проводимостью стенок канала интересна тем, что задание функции  $\Theta(\varphi)$  в виде кусочно-гладкой, принимающей постоянные значения на отдельных участках границы  $\partial\Omega_i$  и равной нулю на остальных участках  $\partial\Omega/\partial\Omega_i$ , позволяет исследовать течение в круглой трубе с различным расположением любого числа электродов конечной проводимости произвольных размеров.

В частности, случай

$$\Theta(\varphi) = \begin{cases} \Theta_0 = \text{const} \neq 0 & \text{при } \alpha < \varphi < \pi - \alpha, \quad -\pi + \alpha < \varphi < -\alpha, \\ 0 & \text{при } |\varphi| < \alpha, \quad \pi - \alpha < \varphi < \pi, \quad -\pi < \varphi < -\pi + \alpha, \end{cases}$$

где  $0 < \alpha < 1/2\pi$ , соответствует практически важному режиму течения в трубе с симметрично расположенными электродами.

2. Аналогично может быть решена задача о течении проводящей среды в канале прямоугольного сечения, две стенки которого, перпендикулярные внешнему магнитному полю  $B_0$ , непроводящие, а две другие обладают переменной проводимостью  $\sigma_w(x)$ .

В этом случае решение системы уравнений (1) при  $\sigma = \eta = 1$  в области течения жидкости  $\Omega \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq l\}$ , удовлетворяющее граничному условию на непроводящих стенках  $x=0$  и  $x=1$ , может быть записано в виде следующего разложения [10]:

$$u(x, y) = U(x) + \exp\left(-\frac{\text{Ha}}{2}x\right) \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{a}_k \frac{\text{ch}(y - 1/2l)\omega_k}{\text{ch} 1/2l\omega_k} \sin k\pi x +$$

$$+ \exp\left(\frac{\text{Ha}}{2}x\right) \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{b}_k \frac{\text{ch}(y - 1/2l)\omega_k}{\text{ch} 1/2l\omega_k} \sin k\pi x,$$

$$B(x, y) = H(x) + \exp\left(-\frac{\text{Ha}}{2}x\right) \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{a}_k \frac{\text{ch}(y - 1/2l)\omega_k}{\text{ch} 1/2l\omega_k} \sin k\pi x -$$

$$- \exp\left(\frac{\text{Ha}}{2}x\right) \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{b}_k \frac{\text{ch}(y - 1/2l)\omega_k}{\text{ch} 1/2l\omega_k} \sin k\pi x,$$

$$\omega_k = (1/4 \text{Ha}^2 + \pi^2 k^2)^{1/2}.$$

Здесь функции  $U(x)$  и  $H(x)$  представляют собой распределение скорости и индуцированного магнитного поля течения Гартмана [1]:

$$U(x) = \frac{1}{\text{Ha}} \frac{\text{ch} 1/2 \text{Ha} - \text{ch}(x - 1/2) \text{Ha}}{2 \text{sh} 1/2 \text{Ha}};$$

$$H(x) = \left\{ \frac{1}{\text{Ha}} \left[ \frac{\text{sh}(x - 1/2) \text{Ha}}{2 \text{sh} 1/2 \text{Ha}} - \left(x - \frac{1}{2}\right) \right] \right\}.$$



Коэффициенты  $\tilde{a}_k$  и  $\tilde{b}_k$  разложений (19) определяются из граничных условий для  $u$  и  $V$  на проводящих стенках канала

$$u=0 \text{ при } y=0 \text{ и } y=l,$$

$$V \mp \Theta(x) \frac{\partial B}{\partial y} = 0 \text{ при } y=0 \text{ и } y=l.$$

При четности функции  $\Theta(x)$  относительно  $x=1/2$  для коэффициентов  $\tilde{a}_k$  и  $\tilde{b}_k$  имеет место соотношение

$$(-1)^k \exp\left(-\frac{\text{Ha}}{2}\right) \tilde{a}_k + \tilde{b}_k = 0,$$

а значения  $\tilde{a}_k$  удовлетворяют следующей бесконечной системе линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} \tilde{a}_k + \sum_{j=1}^{\infty} D_{kj} \tilde{a}_j &= q_k, \quad k=1, 2, \dots; \\ D_{kj} &= \begin{cases} \frac{T_{kj}}{\tau_k} & \text{при } k \neq j, \\ 0 & \text{при } k=j, \end{cases} \quad q_k = \frac{t_k}{\tau_k}, \end{aligned} \quad (20)$$

где

$$T_{kj} = \frac{\rho_j}{4} \left[ \vartheta_{k-j} - \vartheta_{k+j} + (-1)^j \exp\left(-\frac{\text{Ha}}{2}\right) (\chi_{k-j} - \chi_{k+j}) \right];$$

$$\rho_j = \omega_j \operatorname{th} \frac{1}{2} l \omega_j, \quad \tau_k = 1 + T_{kk},$$

$\vartheta_k$ ,  $\chi_k$ ,  $t_k$  — соответственно коэффициенты разложений в ряды Фурье известных функций  $\Theta(x)$ ,  $\chi(x) = \Theta(x) \exp(\text{Ha} x)$  и  $t(x) = -\exp\left(\frac{\text{Ha}}{2} x\right) \times \times [U(x) + H(x)]$  в интервале  $0 < x < 1$ ;

$$\Theta(x) = \frac{\vartheta_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \vartheta_k \cos k\pi x;$$

$$\chi(x) = \frac{\chi_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \chi_k \cos k\pi x;$$

$$t(x) = \sum_{k=1}^{\infty} t_k \sin k\pi x.$$

Проведем обоснование метода редукции решения бесконечной системы (20) для случая кусочно-гладкой функции  $\Theta(x)$ , допускающей конечные разрывы в интервале  $0 < x < 1$ . В этом случае коэффициенты Фурье  $\vartheta_k$  и  $\chi_k$  имеют следующий порядок малости:

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_k &= O(k^{-1}) \\ \chi_k &= O(k^{-1}) \end{aligned} \right\} \text{ при } k \rightarrow \infty, \quad (21)$$

Кроме того для индексных величин  $\rho_k$  и  $\tau_k$  имеем

$$\left. \begin{array}{l} \rho_k = O(k) \\ \tau_k = O(k) \end{array} \right\} \text{ при } k \rightarrow \infty. \quad (22)$$

Введем обозначения

$$X_k = \tilde{a}_k \rho_k^2, \quad Y_k = \tilde{a}_k (1 - \rho_k^2).$$

Замечая, что

$$\tilde{a}_k = X_k + Y_k, \quad (23)$$

преобразуем бесконечную систему (20) к виду

$$X_k + Y_k + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{\infty} M_{kj} X_j + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{\infty} N_{kj} Y_j = q_k, \quad (24)$$

где

$$M_{kj} = \frac{1}{4\tau_k \rho_j} (\vartheta_{k-j} - \vartheta_{k+j});$$

$$N_{kj} = \frac{(-1)^j \rho_j \exp(1/2 \text{Ha})}{\tau_k (1 - \rho_j^2)} (\chi_{k-j} - \chi_{k+j}).$$

Рассмотрим вспомогательные бесконечные системы

$$\alpha_k + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{\infty} M_{kj} \alpha_j = \varepsilon_k q_k; \quad \beta_k + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{\infty} N_{kj} \beta_j = (1 - \varepsilon_k) q_k, \quad (25)$$

где  $\varepsilon_k$  выбраны так, что системы (25) удовлетворяются тождественно при  $\alpha_k = \tilde{a}_k \rho_k^2$  и  $\beta_k = \tilde{a}_k (1 - \rho_k^2)$ . Для решения бесконечных систем (25) может быть применен метод редукции, так как согласно (21) и (22)

$$\sum_{k, j} |M_{kj}|^2 \leq \text{const} \sum_{k, j} \left( \frac{1}{kj} \right)^2 < \infty;$$

$$\sum_{k, j} |N_{kj}|^2 \leq \text{const} \sum_{k, j} \left( \frac{1}{kj} \right)^2 < \infty$$

и последовательности свободных членов этих бесконечных систем суммируемы с квадратами.

Пусть  $\alpha_k$  и  $\beta_k$  — решения бесконечных систем (25), тогда (24) можно удовлетворить, положив  $X_k = \alpha_k$  и  $Y_k = \beta_k$ , а следовательно, на основании (23) имеем  $\tilde{a}_k = \alpha_k + \beta_k$ .

Заметим, что решение  $\tilde{a}_k^*$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) усеченной системы порядка  $n$ , соответствующей бесконечной системе (20), может быть представлено

как  $\tilde{\alpha}^*_k = \alpha^*_k + \beta^*_k$ , где  $\alpha^*_k$  и  $\beta^*_k$  — решения следующих усеченных систем:

$$\alpha^*_k + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n M_{kj} \alpha^*_j = \varepsilon_k q_k, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

$$\beta^*_k + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n N_{kj} \beta^*_j = (1 - \varepsilon_k) q_k, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

При этом  $\alpha^*_k \rightarrow \alpha_k$  и  $\beta^*_k \rightarrow \beta_k$ , если  $n \rightarrow \infty$ , и тогда  $\tilde{\alpha}^*_k = \alpha^*_k + \beta^*_k \rightarrow \alpha_k + \beta_k = \tilde{\alpha}_k$ .

Это означает возможность применения метода редукции к решению бесконечной системы (20) для кусочно-гладкой функции  $\Theta(x)$ .

Найденное решение в формуле (19), (20) при  $\Theta(x) = \text{const}$  описывает течение в канале с двумя параллельными внешнему магнитному полю стенками, проводимость которых  $\sigma_w = \text{const}$  и совпадает с решением, полученным в работе [10].

Следует отметить, что возможность построения решения приведенной выше краевой задачи для случая кусочно-гладкой функции

$$\Theta(x) = \begin{cases} \Theta_0 = \text{const} \neq 0 & \text{при } x_0 < x < 1 - x_0, \\ 0 & \text{при } 0 < x < x_0, 1 - x_0 < x < 1 \end{cases}$$

позволяет рассчитать стационарные распределения осевой скорости и индуцированного магнитного поля в канале с электродами конечных размеров, симметрично расположенными на стенках, параллельных внешнему магнитному полю.

Решения задач для плоского канала и канала прямоугольного сечения с переменной проводимостью стенок, перпендикулярных внешнему магнитному полю, сведением к бесконечным системам были получены в работах [17, 18].

**Стационарные МГД-течения сред с переменными коэффициентами переноса.** При расчетах неизотермических МГД-течений в каналах необходимо учитывать, что коэффициенты переноса рабочих тел могут существенно зависеть от температуры. Поэтому представляет интерес качественная и количественная оценка эффектов, связанных с этими изменениями.

Общее теоретическое исследование неизотермических течений требует задания функциональных зависимостей коэффициентов переноса от температуры (обычно рассматриваются степенные или экспоненциальные зависимости) и включения в исходную систему уравнений энергии, которые даже для несжимаемых сред не могут решаться отдельно от других уравнений полной системы уравнений магнитной гидродинамики. Поэтому и в случае простейших течений получающаяся существенно нелинейная система дифференциальных уравнений может быть исследована практически только численными методами [19, 20].

При построении аналитической теории, учитывающей влияние переменных коэффициентов переноса на характер МГД-течения в канале, следует использовать последовательные итерации, когда в нулевом приближении задается распределение температуры, которое позволяет записать соответствующие пространственные распределения в канале. В этом случае задача о нахождении скорости и индуцированного магнитного поля сводится к решению более простой системы дифференциаль-

ных уравнений с переменными коэффициентами. Решение ее позволяет затем из уравнения энергии рассчитать следующее приближение для температуры и т. д.

Учитывая это, ниже излагается метод расчета МГД-течений в каналах с переменными свойствами рабочей среды, причем характер изменения коэффициентов переноса по объему рабочей среды, заполняющей МГД-канал, считается известным.

1. Рассмотрим течение жидкости в плоском канале, когда коэффициент вязкости полагается постоянным, а проводимость среды  $\sigma(x)$  является заданной функцией. В этом случае из системы уравнений (1) может быть получено уравнение для осевой скорости  $u(x)$  в виде [21]

$$\frac{d^2u}{dx^2} - \text{Ha}^2 \sigma(x) u = -1 - \text{Ha}^2 E_0 \sigma(x), \quad (26)$$

где  $E_0 = E_y / PL^2 \eta_*^{-1} B_0$  — безразмерная напряженность электрического поля, задание которой определяет режим работы МГД-канала. В частности, случай  $E_0 = 0$  соответствует режиму короткого замыкания.

Решение уравнения (26), удовлетворяющее условию прилипания жидкости к стенкам канала  $u(0) = u(1) = 0$ , будем искать в виде разложения в ряд Фурье

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \sin k\pi x. \quad (27)$$

Подставляя (27) в уравнение (26), получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k (k\pi)^2 \sin k\pi x + \text{Ha}^2 \sigma(x) \sum_{k=1}^{\infty} u_k \sin k\pi x = s(x); \quad (28)$$

$$s(x) = 1 + \text{Ha}^2 E_0 \sigma(x).$$

Затем, полагая, что в интервале  $0 < x < 1$

$$s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} s_k \sin k\pi x; \quad \sigma(x) = \frac{\sigma_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k \cos k\pi x;$$

$$\sigma(x) \cdot u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{\sigma}_k \sin k\pi x,$$

где согласно правилу умножения рядов Фурье

$$\bar{\sigma}_k = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} u_j (\sigma_{k-j} - \sigma_{k+j}),$$

из соотношения (28) получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений

$$u_k + \sum_{j=1}^{\infty} u_j \left( \frac{\text{Ha}}{\sqrt{2}\pi k} \right)^2 (\sigma_{k-j} - \sigma_{k+j}) = \frac{s_k}{\pi^2 k^2} \quad k = 1, 2, \dots \quad (29)$$

Какова бы ни была кусочно-гладкая функция  $\sigma(x)$ , для решения бесконечной системы (29) применим метод редукции, так как очевидно, что

матричные элементы и свободные члены этой системы удовлетворяют условиям (17) и (18). Следовательно, выражение (27) с коэффициентами  $u_k$  из (29) есть строгое решение задачи о течении в плоском канале жидкости с переменной проводимостью  $\sigma(x)$ .

В случае  $\sigma(x) \equiv 1$  матрица бесконечной системы (29) обращается в диагональную и значения  $u_k$  могут быть выписаны в явном виде

$$u_k = s_k (\pi^2 k^2 + \text{Ha}^2)^{-1}.$$

При этом решение (27) с коэффициентами  $u_k$ , определенными по этой формуле, представляет собой иную форму известного решения для течения Гартмана [1].

На рис. 1—а, б соответственно приведены примеры расчета распределения скорости в плоском канале в режиме короткого замыкания при значении параметра  $\text{Ha} = 30$  для характерных зависимостей

$$\sigma(x) = \begin{cases} 0,1 & \text{при } 0 < x < 1/3, \quad 2/3 < x < 1, \\ 1 & \text{при } 1/3 < x < 2/3, \end{cases} \quad \sigma(x) = \exp(-\pi x).$$

Как видно из графиков, переменная проводимость рабочей среды может существенно менять структуру потока в канале, приводя к появлению М-образных и несимметричных профилей скорости.

Исследуем влияние переменных свойств среды (проводимости и вязкости) на характер течения в каналах прямоугольного сечения.

2. Пусть течение жидкости происходит в области  $\Omega \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq l\}$ , причем коэффициент вязкости постоянен, а проводимость среды  $\sigma(x)$  является заданной функцией. Будем считать, что две стенки канала, например  $y=0$  и  $y=l$ , непроводящие, а две другие — идеальные проводники.

В этом случае система уравнений (1) запишется в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \text{Ha} \frac{\partial B}{\partial x} = -1; \tag{30}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{\sigma(x)} \frac{\partial B}{\partial x} \right] + \frac{1}{\sigma(x)} \frac{\partial^2 B}{\partial y^2} + \text{Ha} \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Решение системы (30), удовлетворяющее условию

$$u=0, \quad B=0 \quad \text{при } y=0 \quad \text{и} \quad y=l, \tag{31}$$

ищем в виде

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x) \sin \frac{n\pi y}{l}; \tag{32}$$

$$B(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n(x) \sin \frac{n\pi y}{l}.$$

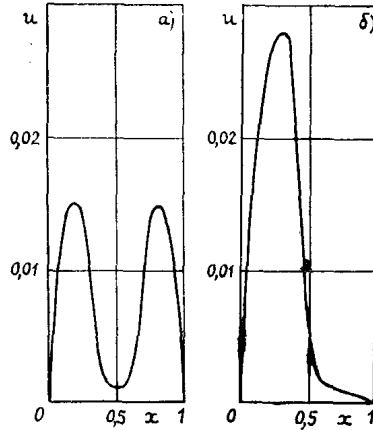


Рис. 1.

Тогда для функций  $v_n(x)$  и  $h_n(x)$  получается система уравнений

$$\begin{cases} \frac{d^2 v_n}{dx^2} - \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 v_n + \text{Ha} \frac{dh_n}{dx} = -\gamma_n; \\ \frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{\sigma(x)} \frac{dh_n}{dx} \right] - \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \frac{1}{\sigma(x)} h_n + \text{Ha} \frac{dv_n}{dx} = 0, \end{cases} \quad (33)$$

где

$$\gamma_n = \frac{2}{n\pi} [1 - (-1)^n]. \quad (34)$$

Так как функции  $v_n(x)$  и  $h_n(x)$  в соответствии с физическими условиями на идеальных проводниках

$$u=0, \quad \partial B/\partial x=0 \quad \text{при } x=0 \text{ и } x=1 \quad (35)$$

должны удовлетворять граничным условиям, причем штрих означает дифференцирование по  $x$ :

$$v_n(0) = v_n(1) = h_n'(0) = h_n'(1) = 0,$$

то решение системы уравнений (33) можно искать в форме разложения в ряды Фурье

$$v_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(n)} \sin k\pi x; \quad h_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k^{(n)} \cos k\pi x + \frac{d_0^{(n)}}{2}. \quad (36)$$

Подставляя (36) в первое уравнение системы (33), находим связь между коэффициентами

$$c_k^{(n)} = \frac{\gamma_k^{(n)}}{(k\pi)^2 + (n\pi/l)^2} - \frac{k\pi \text{Ha}}{(k\pi)^2 + (n\pi/l)^2} d_k^{(n)}, \quad k=1, 2, \dots \quad (37)$$

Здесь

$$\gamma_k^{(n)} = \frac{4}{kn\pi^2} [1 - (-1)^n] [1 - (-1)^k]. \quad (38)$$

Введем в рассмотрение вспомогательные функции

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{h_n(x)}{\sigma(x)} = \frac{\varphi_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \cos k\pi x; \\ \psi(x) &= \frac{1}{\sigma(x)} \frac{dh_n}{dx} = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k \sin k\pi x. \end{aligned} \quad (39)$$

На основании правила умножения рядов Фурье запишем выражения для  $\varphi_k$  и  $\psi_k$

$$\begin{aligned} \varphi_k &= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\infty} d_j^{(n)} (\lambda_{k-j} + \lambda_{k+j}), \quad k=0, 1, 2, \dots; \\ \psi_k &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} d_j^{(n)} \pi j (\lambda_{k-j} - \lambda_{k+j}), \quad k=1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (40)$$

где  $\lambda_k$  — коэффициенты Фурье функции  $\lambda(x) = \frac{1}{\sigma(x)} > 0$ ,

$$\lambda_k = 2 \int_0^1 \lambda(x) \cos k\pi x dx, \quad \lambda_k = \lambda_{-k}.$$

При подстановке выражений (36) во второе уравнение системы (33) с учетом (39) получаем

$$\begin{cases} k\pi\psi_k - (n\pi/l)^2\varphi_k + \text{Ha} k\pi c_k^{(n)} = 0, & k=1, 2, \dots, \\ \varphi_0 = 0. \end{cases} \quad (41)$$

С учетом (40) соотношения (41) преобразуются к следующим

$$d_0^{(n)} = - \sum_{j=1}^{\infty} d_j^{(n)} \frac{\lambda_j}{\lambda_0};$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} d_j^{(n)} \frac{kj\pi^2}{2} (\lambda_{k-j} - \lambda_{k+j}) + \frac{n^2\pi^2}{2l^2} \sum_{j=1}^{\infty} d_j^{(n)} (\lambda_{k-j} + \lambda_{k+j}) = k\pi \text{Ha} c_k^{(n)}. \quad (42)$$

Заменяя в (42)  $c_k^{(n)}$  на  $d_k^{(n)}$  из (37), приходим к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов  $d_k^{(n)}$

$$\begin{aligned} & \frac{k^2 \text{Ha}^2}{k^2 + (n/l)^2} d_k^{(n)} + \sum_{j=1}^{\infty} d_j^{(n)} \frac{kj\pi^2}{2} (\lambda_{k-j} - \lambda_{k+j}) + \\ & + \frac{n^2\pi^2}{l^2} \sum_{j=1}^{\infty} d_j^{(n)} \left\{ \frac{1}{2} (\lambda_{k-j} + \lambda_{k+j}) - \frac{\lambda_k \lambda_j}{\lambda_0} \right\} = \frac{k \text{Ha}}{k^2 + (n/l)^2} \frac{\gamma_k^{(n)}}{\pi}. \end{aligned}$$

Для исследования этой бесконечной системы преобразуем ее к виду

$$d_k^{(n)} + \sum_{j=1}^{\infty} G_{kj} d_j^{(n)} = \mu_k, \quad k=1, 2, \dots \quad (43)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \mu_k &= \frac{k \text{Ha}}{k^2 + (n/l)^2} \frac{\gamma_k^{(n)}}{\pi \delta_k}; \\ \delta_k &= \frac{k^2 \text{Ha}^2}{k^2 + (n/l)^2} + \frac{k^2 \pi^2}{2} (\lambda_0 - \lambda_{2k}); \\ G_{kj} &= G_{kj}^{(1)} + G_{kj}^{(2)}; \\ G_{kj}^{(1)} &= \begin{cases} \frac{kj\pi^2}{2\delta_k} (\lambda_{k-j} - \lambda_{k+j}) & \text{при } k \neq j, \\ 0 & \text{при } k = j, \end{cases} \\ G_{kj}^{(2)} &= \left\{ \frac{1}{2} (\lambda_{k-j} + \lambda_{k+j}) - \frac{\lambda_k \lambda_j}{\lambda_0} \right\} \frac{n^2 \pi^2}{l \delta_k}. \end{aligned}$$

Покажем, что бесконечная система (43) допускает редукцию. Для этого установим справедливость следующих оценок:

$$\sum_{k,j=1}^{\infty} |G_{kj}|^2 < \infty; \quad \sum_{k=1}^{\infty} |\mu_k|^2 < \infty. \quad (44), (45)$$

Справедливость оценки (45) очевидна, так как

$$\mu_k = O(k^{-5}) \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

Легко установить, что

$$\begin{aligned} \sum_{k,j=1}^{\infty} |G_{kj}|^2 &\leq \text{const} \left( \sum_{k,j=1}^{\infty} |G_{kj}^{(1)}|^2 + \sum_{k,j=1}^{\infty} |G_{kj}^{(2)}|^2 \right) \leq \\ &\leq \text{const} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \left( \sum_{j=1}^{\infty} |j\lambda_j|^2 \right). \end{aligned} \quad (46)$$

Для непрерывной функции  $\sigma(x)$  ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} |j\lambda_j|^2$$

сходится и на основании (46) имеет место оценка (44). Можно также показать, что и в случае, когда функция  $\sigma(x)$  кусочно-гладкая, бесконечная система (43) может быть решена методом редукции.

Таким образом, окончательно решение краевой задачи (30), (31), (35) может быть представлено двойными тригонометрическими рядами

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(n)} \sin k\pi x \sin \frac{n\pi y}{l}, \\ B(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sum_{k=1}^{\infty} d_k^{(n)} \cos k\pi x + \frac{d_0^{(n)}}{2} \right) \sin \frac{n\pi y}{l} \end{aligned}$$

с коэффициентами  $d_k^{(n)}$ , удовлетворяющими бесконечной системе (43), и  $c_k^{(n)}$ , определяемыми по формуле (37).

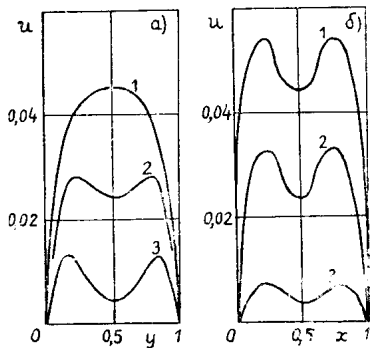


Рис. 2.

На основе полученных аналитических выражений были проведены расчеты распределения скорости при некоторых конкретных заданиях закона изменения проводимости среды  $\sigma(x)$ . Все расчеты проведены для  $Na=30$  и  $l=1$ .

На рис. 2—а, б приведены профили скорости в центральных сечениях  $x=0,5$  и  $y=0,5l$ , когда

$$\sigma(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } 1/3 < x < 2/3, \\ \sigma_0 & \text{при } 0 < x < 1/3, 2/3 < x < 1. \end{cases}$$

Распределения 1, 2 и 3 рассчитывались для значений  $\sigma_0$ , равных 0,05; 0,1 и 0,5.



Сравнение этих результатов с известными результатами для МГД-течений с постоянной проводимостью среды [22] обнаруживает появление М-образности профиля скорости по продольной координате  $x$ . Такая немонотонность распределения скорости обусловлена влиянием переменной проводимости среды, поскольку при постоянной проводимости профиль скорости монотонен по координате вблизи проводящих стенок канала. Отметим также, что уменьшение проводимости среды вблизи электродов ухудшает условия протекания токов, тем самым уменьшая эффект торможения скорости и в некоторых случаях снимая эффект М-образности профиля по координате  $y$  (см. кривую 3 на рис. 2—а). Так как появление М-образности профиля в направлении внешнего магнитного поля не связано с характером проводимости стенок канала, а обусловлено однородностью проводящих свойств среды, то этот эффект существует и в каналах других типов. Таким образом, уменьшение проводимости среды вблизи электродов за счет охлаждения качественно изменяет структуру потока в канале.

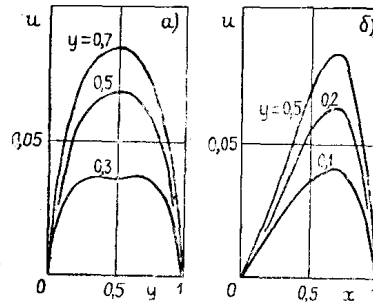


Рис. 3.

При несимметричном распределении проводимости рабочей среды  $\sigma(x)$  по сечению канала профиль скорости оказывается несимметричным и в направлении внешнего поля, причем минимум скорости соответствует области повышенной проводимости среды. На рис. 3—а, б приведены распределения скорости в различных сечениях прямоугольного канала для экспоненциальной зависимости проводимости среды

$$\sigma(x) = A \exp(-\alpha x), \quad A=1, \quad \alpha=5.$$

3. Применим изложенную выше методику решения системы дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами для расчета установившегося течения среды с переменным коэффициентом вязкости  $\eta(x)$ . При этом будем считать, что проводимость среды не изменяется по сечению канала.

В этом случае исходная система уравнений (1) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \eta(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \eta(x) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \text{Ha} \frac{\partial B}{\partial x} &= -1; \\ \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B}{\partial y^2} + \text{Ha} \frac{\partial u}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \tag{47}$$

Системе (47) и граничным условиям (31) удовлетворяют решения вида

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{v}_n(x) \sin \frac{n\pi y}{l}; \\ B(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{h}_n(x) \sin \frac{n\pi y}{l}, \end{aligned}$$

где функции  $\tilde{v}_n(x)$  и  $\tilde{h}_n(x)$  должны быть определены из следующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[ \eta(x) \frac{d\tilde{v}_n}{dx} \right] - \left( \frac{n\pi}{l} \right)^2 \eta(x) \tilde{v}_n + \text{Ha} \frac{d\tilde{h}_n}{dx} &= -\gamma_n; \\ \frac{d^2\tilde{h}_n}{dx^2} - \left( \frac{n\pi}{l} \right)^2 \tilde{h}_n + \text{Ha} \frac{d\tilde{v}_n}{dx} &= 0 \end{aligned} \quad (48)$$

с граничными условиями, вытекающими из (35):

$$\tilde{v}_n(0) = \tilde{v}_n(1) = 0; \quad \tilde{h}_n'(0) = \tilde{h}_n'(1) = 0. \quad (49)$$

Краевой задаче (48), (49) удовлетворяют решения  $\tilde{v}_n$  и  $\tilde{h}_n$ , записанные в виде тригонометрических рядов Фурье

$$\begin{aligned} \tilde{v}_n(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{c}_k^{(n)} \sin k\pi x, \\ \tilde{h}_n(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{d}_k^{(n)} \cos k\pi x \end{aligned}$$

с коэффициентами  $\tilde{c}_k^{(n)}$  и  $\tilde{d}_k^{(n)}$ , связанными соотношением

$$\tilde{d}_k^{(n)} = \frac{k\pi \text{Ha}}{(k\pi)^2 + (n\pi/l)^2} \tilde{c}_k^{(n)}. \quad (50)$$

Последовательность коэффициентов  $\tilde{c}_k^{(n)}$  является решением бесконечной системы линейных алгебраических уравнений, допускающей редукцию:

$$\tilde{c}_k^{(n)} + \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{G}_{kj} \tilde{c}_j^{(n)} = \tilde{\mu}_k, \quad k=1, 2, \dots \quad (51)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{kj} &= \tilde{G}_{kj}^{(1)} + \tilde{G}_{kj}^{(2)}; \\ \tilde{G}_{kj}^{(1)} &= \begin{cases} \frac{kj\pi^2}{2\tilde{\delta}_k} (\eta_{k-j} + \eta_{k+j}) & \text{при } k \neq j, \\ 0 & \text{при } k = j, \end{cases} \\ \tilde{G}_{kj}^{(2)} &= \frac{n^2\pi^2}{l^2\tilde{\delta}_k} (\eta_{k-j} - \eta_{k+j}); \\ \tilde{\delta}_k &= \frac{k^2 \text{Ha}^2}{k^2 + (n/l)^2} + \frac{k^2\pi^2}{2} (\eta_0 + \eta_{2k}); \\ \tilde{\mu}_k &= \frac{\gamma_k^{(n)}}{\tilde{\delta}_k}. \end{aligned}$$

При этом  $\eta_k^{(n)}$  определяется формулой (38), а  $\eta_k$  являются коэффициентами разложения в ряд Фурье функции  $\eta(x)$ , характеризующей распределение вязкости в канале:

$$\eta(x) = \frac{\eta_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k \cos k\pi x.$$

Следовательно, решение краевой задачи (47), (31), (35) имеет вид

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{c}_k^{(n)} \sin k\pi x \cdot \sin \frac{n\pi y}{l},$$

$$B(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{d}_k^{(n)} \cos k\pi x \cdot \sin \frac{n\pi y}{l},$$

где коэффициенты разложения  $\tilde{c}_k^{(n)}$  удовлетворяют бесконечной системе (51), а  $\tilde{d}_k^{(n)}$  определяется по формуле (50).

В заключение отметим, что рассмотренный метод может быть использован также для расчета МГД-течений проводящих сред в каналах других типов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. А. Б. Ватажин, Г. А. Любимов, С. А. Регирер. Магнитогидродинамические течения в каналах. М., 1970.
2. Л. В. Канторович, В. И. Крылов. Приближенные методы высшего анализа. Изд. 5-е. М., 1962.
3. Ю. И. Малов, Л. К. Мартинсон, К. Б. Павлов. МГ, 1971, 3, 67.
4. Ю. И. Малов, Л. К. Мартинсон, К. Б. Павлов. ЖВМиМФ, 1972, 12, 3, 627.
5. В. Х. Кириллов. В кн.: Шестое Рижское совещание по магнитной гидродинамике, 3. Рига, 1968, 113.
6. М. М. Игнатенко. В кн.: Шестое Рижское совещание по магнитной гидродинамике, 3. Рига, 1968, 128.
7. Ю. К. Зандер. В кн.: Шестое Рижское совещание по магнитной гидродинамике, 3. Рига, 1968, 102.
8. О. А. Березин. ПМТФ, 1963, 3, 155.
9. S. Ihara, K. Tajima, A. Matsushima. Trans. ASME, 1967, ser. E-89, 1, 29.
10. Ю. И. Малов, Л. К. Мартинсон, К. Б. Павлов. МЖГ, 1970, 5, 46.
11. J. A. Shercliff. J. Fluid Mech., 1956, 1, 6, 644.
12. Г. М. Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Изд. 3-е. М., 1963.
13. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Изд. 4. М., 1963.
14. Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. Функциональный анализ в нормированных пространствах. М., 1959.
15. I. Tanazawa. Trans. Japan SME, 1961, 27, 183, 1692.
16. А. Е. Якубенко. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1961, 1, 90.
17. Ю. И. Малов, Л. К. Мартинсон, К. Б. Павлов. МГ, 1974, 2, 63.
18. Ю. И. Малов, Л. К. Мартинсон, К. Б. Павлов, И. А. Федотов. МГ, 1972, 3, 140.
19. Ю. В. Саночкин, С. С. Филиппов. ПМТФ, 1966, 6, 58.
20. С. С. Филиппов. В кн.: Шестое Рижское совещание по магнитной гидродинамике, 1. Рига, 1968, 92.
21. A. H. Eraslan. AIAA J., 1966, 4, 10, 1759.
22. J. C. R. Hunt. J. Fluid Mech., 1965, 21, 4, 577.

Поступила 27 марта 1975 г.