

УДК 538.4

А. Гайлитис, Я. Фрейберг

К ТЕОРИИ ВИНТОВОГО МГД-ДИНАМО

Пономаренко [1] показал, что равномерное винтовое движение бесконечного цилиндра (рис. 1) в неподвижной среде той же проводимости при больших значениях магнитного числа Рейнольдса $Rm \gg 1$ генерирует магнитное поле. Настоящая статья посвящена исследованию процесса генерации модели Пономаренко при конечных значениях Rm .

Методы расчета кинематических динамо, как правило, основаны на наличии у модели большого параметра. Это либо Rm , либо число подвижных элементов (бесконечная решетка из винтовых течений, подобных показанному на рис. 1, рассчитана в [2]). Иногда большими предполагаются соотношения геометрических размеров: поток сосредоточен в тонком слое [3, 4], расстояния между подвижными элементами велики и т. п. Однако использование большого параметра затрудняет ответ на вопрос: какое Rm минимально необходимо для самовозбуждения? Минимум Rm чаще всего лежит в области, где большой параметр уже не очень велик и условия расчета нарушены. Даже если и при большом параметре получают конечную величину для Rm и возможна его минимизация по другим параметрам модели [3, 4], оптимальное значение большого параметра остается неизвестным. Более того, в принципе всегда можно переопределить Rm , введя в него большой параметр (скажем, вместо толщины тонкого слоя определить Rm через периметр или корень из сечения канала), и задачу сделать неопределенной.

У модели Пономаренко таких проблем нет. Движение здесь простое и сосредоточено в одном подвижном элементе. Единственным условием является бесконечная длина цилиндра, однако определение Rm через радиус цилиндра не вызывает сомнений. Математическая задача сводится к замкнутому трансцендентному уравнению, и неточность вызывается лишь приближенным вычислением корней последнего. Ограничивать эти выкладки условием $Rm \gg 1$ нет необходимости.

Скорость среды в цилиндрической системе координат r, φ, z представляется выражением $\mathbf{v} = (0, r\omega, v)$, где ω и v постоянны при $r < 1$ и равны нулю при $r > 1$. Магнитное поле \mathbf{B} удовлетворяет уравнениям генерации для среды с магнитной вязкостью $(\mu_0\sigma)^{-1}$:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \partial \mathbf{B} / \partial t = \operatorname{rot} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + (\mu_0\sigma)^{-1} \Delta \mathbf{B} \quad (1)$$

и в силу симметрии модели пропорционально $\exp(im\varphi + ikz + pt)$. Во внешней области ($r > 1$), где $\mathbf{v} = 0$, второе уравнение (1) упрощается:

$$\partial \mathbf{B} / \partial t = (\mu_0\sigma)^{-1} \Delta \mathbf{B} \quad (2)$$

и имеет хорошо известное решение в виде бесселевых функций целочисленного индекса от аргумента $sr = (k^2 + \mu_0\sigma p)^{1/2} r$:

$$\begin{aligned} B_r \pm iB_\varphi &= C_\pm K_{m\pm 1}(sr); \\ B_z &= s/2ik (C_+ + C_-) K_m(sr). \end{aligned} \quad (3)$$

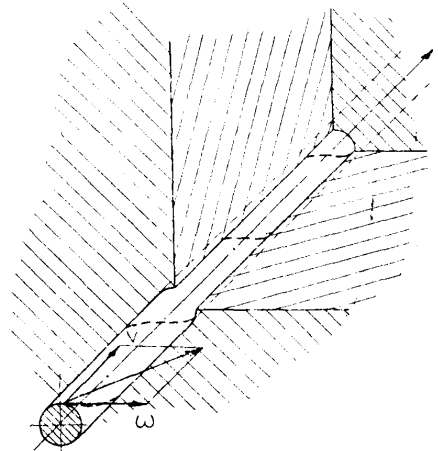


Рис. 1. Схема движения.

Также для внутренней области уравнение (1) можно привести к виду (2), если только перейти в систему координат, двужущуюся вместе с цилиндром $r'=r$, $\varphi'=\varphi-\omega t$, $z'=z-vt$. При таком переходе меняется только эффективная частота поля $p'=p+i(m\omega+kv)$ и решение во внутренней области определяется аргументом $qr=(k^2+\mu_0\sigma p')^{1/2}r$:

$$\begin{aligned} B_{r\pm} \pm iB_{\varphi} &= A_{\pm} I_{m\pm 1}(qr), \\ B_z &= iq/2k(A_+ + A_-) I_m(qr). \end{aligned} \quad (4)$$

Конечность поля при $r=0$ определяет в (4) выбор функций I , в то время как условие затухания при $r \rightarrow \infty$ в (3) требует использования функций K и выполнения $\Re s \geq 0$.

Построение решения для всего пространства сводится к обеспечению непрерывности \mathbf{V} и также тангенциальных компонент электрического поля $\text{rot } \mathbf{V}/\mu_0\sigma - \mathbf{v} \times \mathbf{V}$ на поверхности $r=1$.

Собственное значение $p=\gamma+i\Omega$ определяется из согласованности данных граничных условий, что приводит к вековому уравнению (8) из [1]:

$$\omega(R_+^{-1} - R_-^{-1}) = 2i, \quad (5)$$

где

$$R_{\pm} = qI_m(q)/I_{m\pm 1}(q) + sK_m(s)/K_{m\pm 1}(s),$$

которое в общем случае можно записать в виде

$$F(\omega, v, m, k, p) = 0. \quad (6)$$

Поле генерируется, если у уравнения (6) существует корень p , для которого $\gamma = \Re p > 0$.

Отметим, что для данной модели постановка линейной задачи кинематического МГД-динамо во многом сходна с постановкой, также в линейном приближении, задачи о гидродинамической неустойчивости [5], т. е. о явлении, которое приводит к возникновению турбулентности в плоской щели. Аналогична также интерпретация полученных результатов — возрастания одних мод малых начальных возмущений и затухание других.

Уравнение (6) при заданном наклоне винтового движения $\kappa=v/\omega$ для каждого $m=1, 2, \dots$ определяет зависимость p от волнового числа k и магнитного числа Рейнольдса $Rm = \mu_0\sigma\omega(1+\kappa^2)^{1/2}$ (Rm определяется по максимальной скорости и радиусу движущегося цилиндра $r=1$). Условие $\gamma = \text{const}$ или $\Omega = \text{const}$ приводит к соотношению между k и Rm , т. е. к кривым в плоскости (k, Rm) . Кривую с $\gamma=0$ называют нейтральной кривой. Наименьшее $Rm = Rm^*$ на нейтральной кривой является критическим, так как только при $Rm > Rm^*$ для k , заключенных между

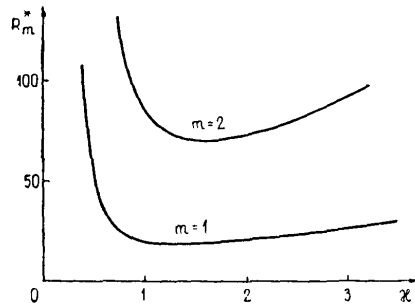


Рис. 2. Зависимость критического магнитного числа Рейнольдса от наклона винтового движения.

двумя ветвями нейтральной кривой, существуют растущие во времени возмущения магнитного поля — начинается генерация. При исследовании гидродинамической неустойчивости аналогично определяется критическое число Рейнольдса.

Мы провели численный расчет на ЭВМ нейтральных кривых, определяемых выражением (6) при $m=1$ и 2 и различными κ , и таким образом построили зависимость $Rm^*(\kappa)$, приведенную на рис. 2. Обе кривые $Rm^*(\kappa)$ имеют явно выраженные минимумы. Наименьшее значение $Rm^* = 17$ получилось для $m=1$ и $\kappa =$

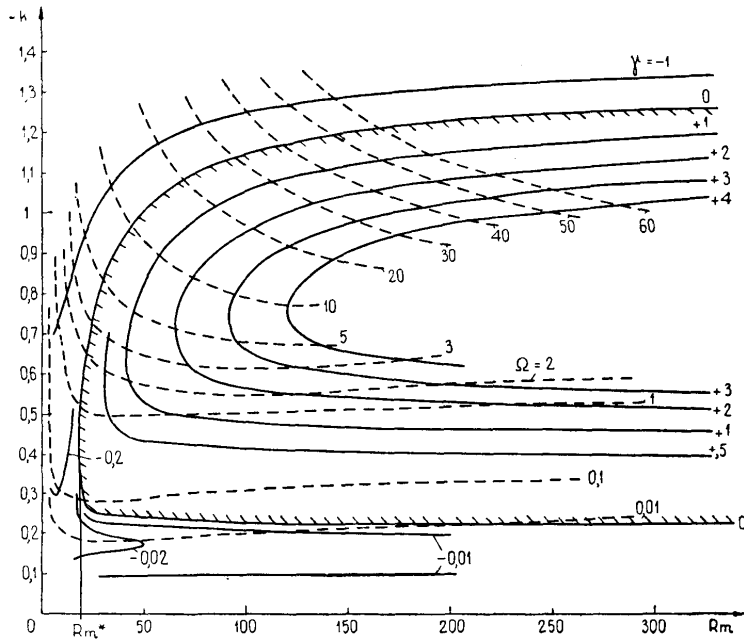


Рис. 3. Характеристики генерации магнитного поля при $m = 1$, $\kappa = 1,3$.

$= 1,3$. Этот порог генерации намного меньше, чем для других рассчитанных моделей МГД-динамо, например, [3] и [4].

Пономаренко [1] установил, что уравнение (6) имеет конечное и переменное число корней и что при малых Rm корней нет. В этой работе приведена также нумерация корней по порядку их появления с увеличением Rm при $k = -m/\kappa$. Численным исследованием первых трех собст-

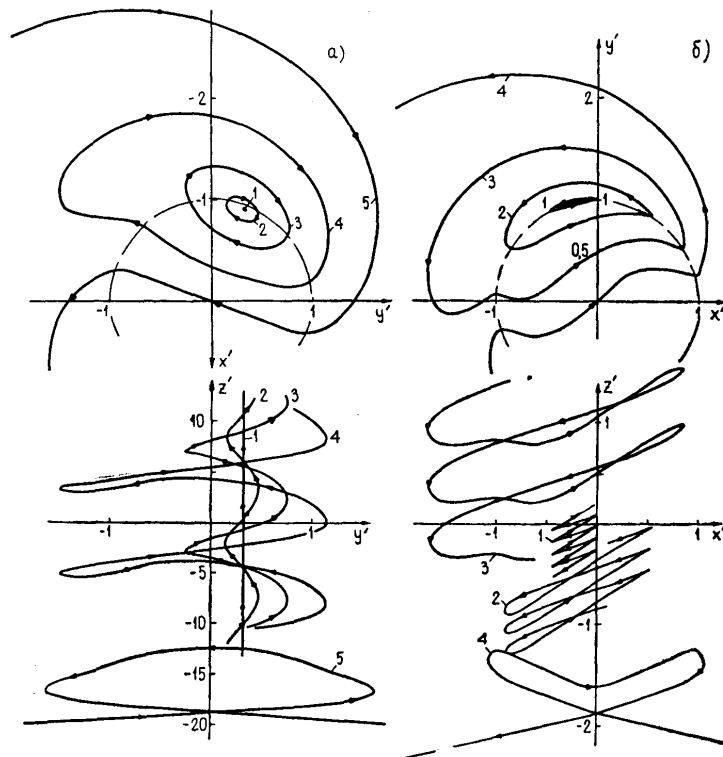


Рис. 4. Магнитные силовые линии (а) и линии тока (б) в двух проекциях в винтовой системе координат.

венных значений установлено, что положительное γ существует только для первого, по упомянутой нумерации, собственного значения, а остальные отвечают быстро затухающим формам возмущений. Такой же результат известен для гидродинамической неустойчивости [6].

Для точки наименьшего Rm^* была рассчитана полная зависимость первого собственного значения $p = \gamma(k, \text{Rm}) + i\Omega(k, \text{Rm})$, приведенная на рис. 3. Изображенная первая ветвь собственного значения исчезает при $\Omega = 0$.

Картина генерируемых магнитных силовых линий обладает интересными особенностями. В качестве примера рассчитана мгновенная пространственная конфигурация первой моды магнитного поля и соответствующего распределения электрического тока, которые характеризуются $\text{Rm} = 27$, $\kappa = 1,3$, $m = 1$, $\gamma = 0$, $\Omega = 3,7$, $k = -0,77$. Эта точка лежит на нейтральной кривой и характерна тем, что $m + \kappa k = 0$, т. е. линии постоянного поля совпадают с линиями тока движения. На рис. 4—а изображены пять магнитных силовых линий в винтовой системе координат $r' = r$, $\varphi' = \varphi + kz$, $z' = z$. В этой системе координат поле не зависит от z' . Нарисована только половина картины поля, так как оно симметрично к повороту на угол 180° и одновременному изменению направления поля на противоположное. Из силовых линий магнитного поля две ($r' = 0,95$, $\varphi' = -19,5^\circ$ и $\varphi' = 160,5^\circ$) являются центральными — они совпадают с линией B_r , B_φ , $B_z = \text{const}$ и поэтому представляют собой простые спирали, намотанные на круглый цилиндр (винтовые линии). В координатах r' , φ' , z' эти спирали выглядят прямыми вертикальными линиями. Остальные силовые линии обмотаны в виде искаженных вторичных спиралей вокруг центральных. Чем ближе вторичная спираль к центральной, тем больше ее шаг. Силовая линия, проходящая через начало координат, начинается в бесконечности и уходит в бесконечность $r \rightarrow \infty$, $z \rightarrow -\infty$. В винтовых координатах она находится на цилиндрической поверхности, образуемая которой при больших r стремится к двухветвенной спирали Архимеда.

Картина линий тока \mathbf{j} на рис. 4—б определяется соотношением $\mu_0 \mathbf{j} = \text{rot } \mathbf{V}$. В отличие от магнитного поля ток не имеет центральных линий. Точнее, такая линия должна была быть на самой поверхности вращающегося цилиндра $r = 1$, где ток вместе со скоростью терпит скачок. Все же соседние к центральной линии делают зигзаги конечного шага: проходят то по одной, то по другой стороне поверхности разрыва.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пономаренко Ю. Б. ПМТФ, 1973, № 6, с. 47.
2. Гайлитис А. МГ, 1967, № 3, с. 45.
3. Гайлитис А., Фрейберг Я. МГ, 1974, № 1, с. 37.
4. Фрейберг Я. МГ, 1975, № 3, с. 3.
5. Линь Цзя-цзяо. Теория гидродинамической устойчивости. М., ИЛ, 1958.
6. Бетчов Р., Криминале В. Вопросы гидродинамической устойчивости. М., «Мир», 1971.

Поступила 30 октября 1975 г.