

УДК 621.313.333:532:538.4

Б. Б. Волчек, Г. М. Гехт, И. М. Толмач, А. И. Элькин

**О ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ  
И ВЫЗВАННЫХ ЕЮ СТАЦИОНАРНЫХ ТЕЧЕНИЯХ  
В КОАКСИАЛЬНОМ КАНАЛЕ ИНДУКЦИОННОГО МГД-НАСОСА**

В [1] показана возможность возникновения в канале индукционной МГД-машины гидродинамической неустойчивости, обусловленной размагничивающим действием вторичных токов. Границы неустойчивости найдены в общем случае для турбулентного режима из уравнений стационарного течения (что исключает из рассмотрения немонотонные возмущения) при постоянном фазном токе. В данной работе, где рассматривалось ламинарное течение, при выводе условий устойчивости подход был несколько более общим. Именно, здесь были использованы временные уравнения, напряжение сети предполагалось постоянным, а вид характеристики источника гидравлической мощности произвольным; было также учтено влияние трения, обусловленного неоднородным распределением скорости по азимуту. При изучении стационарных возмущенных течений трение не учитывалось, что позволило провести наглядный анализ на фазовой плоскости.

Коротко эти вопросы уже рассматривались авторами в [2, 3], здесь они изложены более подробно.

Важным безразмерным критерием задачи, часто используемым ниже, является магнитное число Рейнольдса  $R_m = \sigma \mu (v_s - v_0) \tau / \pi$ , где  $v_s$  — скорость поля,  $v_0$  — невозмущенная скорость жидкого металла.

**Расчетные уравнения.** Пусть в общем случае коаксиального канала индукционного МГД-насоса  $\delta/R \ll 1$  и  $\delta/\tau \ll 1$ , где  $R$  — радиус канала насоса,  $\tau$  — полюсное деление, так что справедливо приближение плоскопараллельного поля [4]. Полагая течение ламинарным, запишем [4]:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = \mu_0 \sigma \left( \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial H_1}{\partial t} + v \frac{\partial H_1}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial x} \right); \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\eta}{\rho} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \frac{\mu_0}{\rho} \frac{\partial h}{\partial x} (H_1 + h); \quad (2)$$

$$-U_A + L_1 \frac{di_A}{dt} + R_1 i_A = - \frac{d\psi_A}{dt}; \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^k \frac{l_i}{l_H F_i} \frac{\partial G}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\Delta p(G)}{l_H}. \quad (4)$$

Здесь (1), (2) — уравнения импульсов и индукции, (3) — закон Кирхгофа, (4) — уравнение импульсов гидравлической сети насоса, состоящей из последовательно соединенных  $k$  участков длины  $l_i$  и сечения  $F_i$ ,  $\Delta p(G)$  — статическая  $p-G$  характеристика гидравлической сети,

$$\psi_A = \omega K_{\delta 0} \mu_0 \int_0^{2\pi R} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} (H_1 + h) dy dx \quad (5)$$

— потокосцепление фазы,  $L_1$  — индуктивность рассеяния,  $R$  — сопротивление,  $H_1$  — первичное поле,  $h$  — собственное поле. Решение системы уравнений (1) — (4) ищем в виде

$$\begin{aligned} v &= v_0 + v'; & h &= \dot{h}e^{i(\omega t - \alpha x)} = (\dot{h}_0 + \dot{h}')e^{i(\omega t - \alpha x)}; \\ H_1 &= \dot{H}_1 e^{i(\omega t - \alpha x)} = (H_{m0} + H')e^{i(\omega t - \alpha x)}; \\ i_A &= i_{A0} e^{i\omega t}; & \partial p / \partial x &= (\partial p / \partial x)_0 + (\partial p / \partial x)'. \end{aligned} \quad (6)$$

Полагая напряжение заданным, запишем:

$$u = \dot{u}_0 e^{i\omega t}. \quad (7)$$

Здесь индексом «0» отмечены параметры исходного однородного потока, индексом «штрих» — возмущения.

Полагаем:

$$\begin{aligned} v' &= v'(y, t); & h' &= h'(y, t); & H' &= H'(t); & (\partial p / \partial x)' &= f(t); \\ \dot{i}_A &= \dot{i}_A(t); & \dot{u}_A &= \dot{u}_0. \end{aligned}$$

Подставив выражение для потокосцепления (5) в уравнение (3) и исключив фазный ток  $i_A$  при помощи уравнения  $H_1 = \gamma_H i_A$  [4], где  $\gamma_H = \frac{3\omega K_{об}}{2\sqrt{2}K_{ЭР1}\delta K_{нр}}$ , воспользовавшись соотношениями (6), получим:

$$\begin{aligned} -\dot{u}_0 + \dot{H}_1(\tilde{L}i\omega + R_1 - \gamma_\Psi i\omega) + \frac{d\dot{H}_1}{dt}(\tilde{L} - \gamma_\Psi) &= \\ = \gamma_\Psi i\omega \int_0^{2\pi R} \frac{\dot{h}dy}{2\pi R} + \gamma_\Psi \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi R} \dot{h}'dy. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь  $\tilde{L} = \gamma_H^{-1} L_1$ ;  $\gamma_\Psi = 2\omega K_{об} \mu_0 2\pi R \alpha^{-1}$ .

Для невозмущенных величин справедливо уравнение

$$-\dot{u}_0 + \dot{H}_0(\tilde{L}i\omega + R_1 - \gamma_\Psi i\omega) = \gamma_\Psi i\omega h_{a0}. \quad (9)$$

Решая совместно (8) и (9), приходим к уравнению электрического равновесия для возмущений:

$$\dot{H}'(\tilde{L}i\omega + R_1 - \gamma_\Psi i\omega) + \frac{d\dot{H}'}{dt}(\tilde{L} - \gamma_\Psi) = \gamma_\Psi i\omega \int_0^{2\pi R} \frac{\dot{h}'dy}{2\pi R} + \gamma_\Psi \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi R} \dot{h}'dy. \quad (10)$$

Обозначим  $H' = H'_r + iH'_a$ ;  $\dot{h}' = \dot{h}'_r + i\dot{h}'_a$ . Здесь и далее индексы  $r$  и  $a$  обозначают вещественную и мнимую части. Выделим в уравнении (10) вещественную и мнимые части. Имеем:

$$H'_r R + H'_a(\gamma_\Psi \omega - \tilde{L}\omega) + \frac{dH'_r}{dt}(\tilde{L} - \gamma_\Psi) = - \int_0^{2\pi R} \frac{\gamma_\Psi \omega \dot{h}'_a}{2\pi R} dy + \frac{\gamma_\Psi}{2\pi R} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{2\pi R} \dot{h}'_r dy; \quad (11)$$

$$H'_a R + \frac{dH'_a}{dt}(\tilde{L} - \gamma_\Psi) + (\tilde{L} - \gamma_\Psi) H'_r \omega = \frac{\gamma_\Psi \omega}{2\pi R} \int_0^{2\pi R} \dot{h}'_r dy + \frac{\gamma_\Psi}{2\pi R} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{2\pi R} \dot{h}'_a dy. \quad (12)$$

Осредним теперь уравнение импульсов (2) по координатам  $z$  и  $x$ , воспользовавшись при этом соотношениями (6) и полагая, аналогично [4], что по координате скорость распределена как в задаче Гартмана. Получим:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \left\langle \frac{\partial p}{\partial x} \right\rangle + \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + cv + \frac{\mu_0 \alpha}{2\rho} [H_a h_r - h_a H_r];$$

$$c = -\frac{4\eta}{\delta^2 \rho} \frac{\text{Ha th Ha}}{1 - \text{th Ha/Na}}. \quad (13)$$

Здесь, следуя [5], принято  $\text{Na} = \frac{B_m \delta}{2\sqrt{1 + R_m^2}} \sqrt{\frac{\sigma}{\eta}}$ , т. е. число Гартмана строится по суммарному магнитному полю. С учетом уравнения импульсов для невозмущенных величин получим для возмущений:

$$\frac{\partial v'}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right)' + \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial^2 v'}{\partial y^2} + cv' + \frac{\mu_0 \alpha}{2\rho} [H'_a (h_{r0} + h'_r) - h_{a0} H'_r - h'_a (H_{m0} + H'_r)]. \quad (14)$$

Уравнение индукции (1) после подстановки выражений (6), при помощи уравнения индукции для невозмущенных величин дает

$$\frac{\partial^2 \dot{h}'}{\partial y^2} - \mu_0 \sigma \left( \frac{\partial \dot{h}'}{\partial t} + \frac{\partial \dot{H}}{\partial t} \right) - (v_s - v_0) \mu_0 \alpha \sigma (\dot{h}' + \dot{H}') i +$$

$$+ v' \mu_0 \sigma \alpha i (\dot{H}' + H_{m0} + \dot{h}_0 + \dot{h}') - \alpha^2 \dot{h}' = 0. \quad (15)$$

Выделяя вещественную и мнимую части, получим:

$$\frac{\partial^2 h'_r}{\partial y^2} - \mu_0 \sigma \left( \frac{\partial h'_r}{\partial t} + \frac{dH'_r}{dt} \right) + (v_s - v_0) \sigma \mu_0 \alpha (h'_a + H'_a) -$$

$$- \sigma \mu_0 \alpha v' (h'_a + H'_a + h_{a0}) - \alpha^2 h'_r = 0; \quad (16)$$

$$\frac{\partial^2 h'_a}{\partial y^2} - \mu_0 \sigma \left( \frac{\partial h'_a}{\partial t} + \frac{dH'_a}{dt} \right) - \sigma \mu_0 \alpha (v_s - v_0) (h'_r + H'_r) + v' (h_{r0} +$$

$$+ H_{m0} + h'_r + H'_r) \sigma \mu_0 \alpha - \alpha^2 h'_a = 0. \quad (17)$$

Уравнение импульсов гидравлической сети насоса с учетом соотношения для невозмущенных величин дает:

$$\sum_{i=1}^k \frac{l_i}{F_i l_H} \frac{\partial G'}{\partial t} = \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right)' - l_H^{-1} [\Delta p (G_0 + G') - \Delta p (G_0)]. \quad (18)$$

Система шести уравнений для возмущений (11), (12), (14), (16), (17), (18) замкнута, содержит переменные  $h'_a$ ,  $h'_r$ ,  $v'$ ,  $H'_a$ ,  $H'_r$ ,  $(\partial p / \partial x)'$  и должна удовлетворять периодическим краевым условиям:

$$h'_a(0) = h'_a(2\pi R); \quad h'_r(0) = h'_r(2\pi R); \quad v'(0) = v'(2\pi R); \quad (19)$$

$$\frac{\partial h'_a}{\partial y}(0) = \frac{\partial h'_a}{\partial y}(2\pi R); \quad \frac{\partial h'_r}{\partial y}(0) = \frac{\partial h'_r}{\partial y}(2\pi R); \quad \frac{\partial v'}{\partial y}(0) = \frac{\partial v'}{\partial y}(2\pi R).$$

**Устойчивость течения по отношению к малым возмущениям.** Линеаризируя уравнения (14), (16), (17), (18), получим:

$$\frac{\partial v'}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right)' + \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial^2 v'}{\partial y^2} + c v' + \frac{\mu_0 \alpha}{2\rho} (H'_a h_{r0} - h_{a0} H'_r - h'_a H_{m0}); \quad (20)$$

$$\frac{\partial^2 h'_r}{\partial y^2} - \mu_0 \sigma \left( \frac{\partial h'}{\partial t} + \frac{dH'_r}{dt} \right) + (v_s - v_0) \sigma \mu_0 \alpha (h'_a + H'_a) - \sigma \mu_0 \alpha v' h_{a0} - \alpha^2 h'_r = 0; \quad (21)$$

$$\frac{\partial^2 h'_a}{\partial y^2} - \mu_0 \sigma \left( \frac{\partial h'_a}{\partial t} + \frac{dH'_a}{dt} \right) - \sigma \mu_0 \alpha (v_s - v_0) (h'_r + H'_r) + v' (h_{r0} + H_{m0}) \sigma \mu_0 \alpha - \alpha^2 h'_a = 0; \quad (22)$$

$$\sum_{i=1}^h \frac{l_i}{F_i l_n} \frac{\partial G'}{\partial t} = \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right)' - l_n^{-1} \left( \frac{\partial \Delta p}{\partial G} \right)_0 G'. \quad (23)$$

Система уравнений (20)–(23), (11), (12) имеет частные решения

$$v' = \dot{v}_1 e^{\varepsilon t - i\lambda_n y}; \quad h'_a = \dot{h}_{a1} e^{\varepsilon t - i\lambda_n y}; \quad h'_r = \dot{h}_{r1} e^{\varepsilon t - i\lambda_n y};$$

$$H'_a = H'_r = 0; \quad \lambda_n = n/R, \quad n = 1, 2, 3, \quad (24)$$

удовлетворяющие условиям периодичности (19). Воспользовавшись выражениями (24), получим:

$$\int_0^{2\pi R} v' dy = \int_0^{2\pi R} h'_r dy = \int_0^{2\pi R} h'_a dy = 0. \quad (25)$$

Подстановка (24), (25) в уравнение (23) дает

$$(\partial p / \partial x)' = 0 \quad (26)$$

независимо от вида статической  $p-G$  характеристики сети. Подстановка соотношений (24)–(26) в уравнения (20)–(22) приводит к линейной однородной системе уравнений для величин  $\dot{v}_1$ ,  $\dot{h}_{a1}$ ,  $\dot{h}_{r1}$ :

$$\dot{v}_1 \left( \varepsilon + \frac{\lambda_n^2 \eta}{\rho} - c \right) + \frac{\mu_0}{2\rho} \alpha H_{m0} h_{a1} = 0;$$

$$\dot{v}_1 \sigma \mu_0 \alpha h_{a0} + \dot{h}_{r1} (\lambda_n^2 + \alpha^2 + \mu_0 \sigma \varepsilon) - h_{a1} \mu_0 \sigma \alpha (v_s - v_0) = 0; \quad (27)$$

$$- \sigma \mu_0 \alpha (h_{r0} + H_{m0}) \dot{v}_1 + \dot{h}_{r1} [\sigma \mu_0 \alpha (v_s - v_0)] + h_{a1} (\lambda_n^2 + \mu_0 \sigma \varepsilon + \alpha^2) = 0.$$

Приравнявая нулю детерминант этой системы, получаем дисперсионное уравнение

$$p \bar{\varepsilon}^3 + q \bar{\varepsilon}^2 + r \bar{\varepsilon} + S_1 = 0, \quad (28)$$

где

$$p = 1; \quad q = \pm [2(\bar{\lambda}_n^2 + 1) R_m^{-1} + (\bar{\lambda}_n^2 - \bar{c}) \text{Re} s^{-1}];$$

$$r = R_m^{-1} \left[ \frac{\text{St}}{2(1 + R_m^2)} + 2 \text{Re} s^{-1} (\bar{\lambda}_n^2 - \bar{c}) (\bar{\lambda}_n^2 + 1) + \frac{(\bar{\lambda}_n^2 + 1)^2 + R_m^2}{R_m} \right];$$

$$S_1 = \pm \left\{ \frac{\text{St}[(\bar{\lambda}_n^2 + 1) - R_m^2]}{2 R_m^2 (1 + R_m^2)} + \frac{\text{Re} s^{-1} (\lambda_n^2 - \bar{c})}{R_m^2} [(\bar{\lambda}_n^2 + 1)^2 + R_m^2] \right\};$$

$$\bar{\lambda}_n = \lambda_n \alpha^{-1} = \frac{\tau n}{\pi R}; \quad \bar{\varepsilon} = \varepsilon |\omega_s|^{-1}; \quad \omega_s = \alpha (v_s - v_0); \quad \delta = \bar{\delta} \alpha^{-1};$$

$$\bar{c} = -\frac{4}{\bar{\delta}^2} \frac{\text{Ha th Ha}}{1 - \text{th Ha/Ha}}; \quad \text{St} = \frac{\sigma B_m^2}{\rho \omega_s}; \quad \text{Re}_s = \frac{\rho \omega_s}{\alpha^2 \eta}.$$

Знак плюс относится к насосному, минус — к генераторному режиму. Течение устойчиво, если все корни уравнения (28) имеют отрицательные вещественные части, для чего необходима [6] положительность главных диагональных миноров матрицы Гурвица

$$\begin{vmatrix} q & p & 0 \\ S_1 & r & q \\ 0 & 0 & S_1 \end{vmatrix},$$

т. е. должно быть

$$q > 0; \quad qr - pS_1 > 0; \quad S_1(qr - pS_1) > 0. \quad (29)$$

Поскольку в насосном ( $\text{Re}_s > 0$ ;  $\text{St} > 0$ ;  $R_m > 0$ ) и генераторном ( $\text{Re}_s < 0$ ;  $\text{St} < 0$ ;  $R_m < 0$ ) режимах знаки величин  $q$ ,  $r$ ,  $p$ ,  $S_1$  совпадают, условия устойчивости обоих режимов одинаковы. В дальнейшем ограничимся рассмотрением только насосного режима. Из расчетов следует, что при  $0 < \lambda_n < 30$ ;  $0 < R_m < 25$  детерминант  $\Delta = 27p^2S_1^2 - 18pqrS_1 + 4q^3S_1 + 4pr^3 - q^2r^2$  уравнения (28) положителен. Поэтому уравнение (28) имеет один вещественный и два комплексно сопряженных корня, что отвечает монотонному и колебательному возмущениям. Рассмотрим условия устойчивости (29). Величины  $q$  и  $qr - pS_1$  положительны при любых положительных  $\text{Re}_s$  и  $R_m$ . Поэтому единственное условие устойчивости имеет вид

$$S_1 > 0. \quad (30)$$

Поскольку согласно [7] условие  $qr - pS_1 > 0$  характеризует колебательные, а условие  $S_1 > 0$  — монотонные возмущения, возможна лишь монотонная неустойчивость, а колебательные возмущения всегда затухают. Условие устойчивости (30) запишем в виде

$$R_m^2 < R_{m \text{ кр } n}^2 = (1 + \bar{\lambda}_n^2) \frac{\text{Ha}_1^2 + (\bar{\lambda}_n^2 - \bar{c})(1 + \bar{\lambda}_n^2)}{\text{Ha}_1^2 - (\bar{\lambda}_n^2 - \bar{c})};$$

$$\text{Ha}_1 = \frac{B_m}{\alpha} \sqrt{\frac{\sigma}{2\eta(1 + R_m^2)}} = \frac{\text{Ha} \sqrt{2}}{\bar{\delta}}. \quad (31)$$

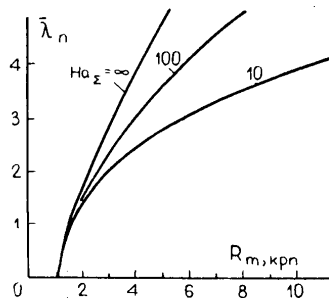


Рис. 1. Разделительные кривые зон устойчивых (слева) и неустойчивых (справа) течений.

Критическое число Рейнольдса  $R_{m \text{ кр } n}$  принимает ряд значений, при переходе через которые течение становится неустойчивым по отношению к возмущениям определенного масштаба. Из (31) следует, что трение повышает устойчивость течения. На рис. 1 показаны рассчитанные по формуле (30) нейтральные линии, слева от которых находится область устойчивых, а справа — неустойчивых течений.

**Модель двух насосов.** Эта модель течения, в которой предполагается, что жидкий металл в насосе образует две зоны, в каждой из которых движется как твердое тело [1, 2], детально проанализирована в [1]. Здесь получены про-

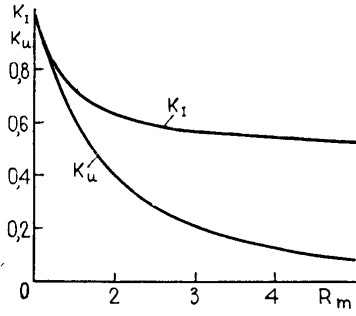


Рис. 2. Зависимость давления (в долях невозмущенного значения) от числа  $R_m$ ;  $K_I$  — случай  $i_A = \text{const}$ ,  $K_U$  — случай  $U_A = \text{const}$ .

стые выражения для оценки степени падения напора при переходе к неоднородному течению для случаев постоянства фазного тока или напряжения. Для каждой из зон справедливо выражение для давления

$$\Delta p = \frac{\pi \mu_0 l_H H_m^2}{2\tau} \frac{R_m}{1 + R_m^2}. \quad (32)$$

Вводя обозначения  $v = v_0 \pm v'$ ;

$$R_{m_1} = R_m + R_m'; \quad R_{m_2} = R_m - R_m';$$

$$R_m' = \frac{\sigma \mu l v'}{\tau}, \quad (33)$$

где индексами 1, 2 обозначены зоны, приравняем электромагнитные давления зон. Получим:

$$R'_{m_1} = 0; \quad R'_{m_{2,3}} = \pm \sqrt{R_m^2 - 1}. \quad (34)$$

Первый корень соответствует невозмущенному течению, второй и третий — неоднородным течениям. Подставляя (33), (34) в (32) для относительного давления  $K_I = \Delta p / \Delta p_{\text{нв}}$  (индекс нв характеризует невозмущенную величину) при одинаковых расходах и фазных токах, т. е. при одинаковых  $H_m$ , получим:

$$K_I = 0,5(1 + R_m^{-2}). \quad (35)$$

Зависимость (35) показана на рис. 2.

При одинаковых напряжениях, что более реалистично, расчетные уравнения могут быть получены из системы уравнений (20), (14), (15), если положить  $\partial/\partial t = \partial/\partial y = 0$ ;  $v'_1 = v'_2$ . Положим также для простоты  $\tilde{L} = \tilde{R} = 0$ . Имеем:

$$\begin{aligned} \dot{H} &= -1/2(\dot{h}_1 + \dot{h}_2); \quad \dot{h}_0 i R_{m'_1} + \dot{h}'_1(1 + i R_m + i R_{m'_1}) = -\dot{H}_0 i R_{m'_1} - \\ &\quad - \dot{H}' i (R_m + R_{m'_1}); \\ -\dot{h}_0 i R_{m'_1} + \dot{h}'_2(1 + i R_m - i R_{m'_1}) &= \dot{H}_0 i R_{m'_1} - \dot{H}' i (R_m - R_{m'_1}); \\ H'_a(h'_{r1} - h'_{r2}) + (H_{m0} + H'_r)(h'_{a2} - h'_{a1}) &= 0. \end{aligned} \quad (36)$$

Решив систему уравнений (36) и подставив решение в выражение для давления, для относительного давления  $K_U = \Delta p / \Delta p_{\text{нв}}$  получим

$$K_U = 2(1 + R_m^2)^{-1}. \quad (37)$$

Зависимость (37) показана на рис. 2 и свидетельствует о большем снижении давления при  $i_A = \text{const}$  по сравнению со случаем  $U_A = \text{const}$ .

**Стационарные течения в коаксиальном канале индукционного насоса.** Для отыскания стационарных вторичных течений положим в уравнениях (14), (16), (17)  $\partial/\partial t = 0$ ;  $\dot{H}' = 0$ ;  $(\partial p / \partial x)' = 0$ , т. е. будем сравнивать невозмущенный и возмущенный потоки при одинаковых градиентах давления и первичных полях. Имеем:

$$\frac{d^2 \bar{v}}{d\bar{y}^2} + \bar{c} \bar{v} + \text{Ha}_1^2 \bar{h}_a = 0;$$

$$\frac{d^2\bar{h}_r}{d\bar{y}^2} + \bar{h}_a - \bar{v}(1 + \bar{h}_a) - \bar{h}_r = 0; \quad (38)$$

$$\frac{d^2\bar{h}_a}{d\bar{y}^2} - \bar{v} - \bar{h}_a - R_m^2\bar{h}_r + R_m^2\bar{v}\bar{h}_r = 0.$$

Здесь  $y = \bar{y}\alpha^{-1}$ ;  $\bar{h}_r = \frac{h'_r}{h_{r0}}$ ;  $\bar{h}_a = \frac{h'_a}{h_{a0}}$ ;  $\bar{v} = \frac{v'}{v_s - v_0}$ . Пренебрегая трением, запишем:

$$\frac{d^2\bar{h}_r}{d\bar{y}^2} - \bar{v} - \bar{h}_r = 0; \quad -\bar{v} - R_m^2\bar{h}_r + R_m^2\bar{v}\bar{h}_r = 0 \quad (39)$$

или

$$\frac{d\bar{h}_r}{d\bar{y}} = \varphi; \quad \frac{d\varphi}{d\bar{y}} = \bar{h}_r \left( \frac{R_m^2}{R_m^2\bar{h}_r - 1} + 1 \right). \quad (40)$$

Система (34) имеет первый интеграл

$$\varphi = \pm \sqrt{2(\bar{h}_r - \bar{h}_{r1}) + \frac{2}{R_m^2} \ln \left( \frac{R_m^2\bar{h}_r - 1}{R_m^2\bar{h}_{r1} - 1} \right) + h_r^2 - h_{r1}^2 + \varphi_1^2}. \quad (41)$$

Исследуем тип ее особых точек  $\bar{h}_r = \varphi = 0$  и  $\bar{h}_r = R_m^{-2} - 1$ ;  $\varphi = 0$ . Разложив правые части (40) в ряд Тейлора в окрестностях особых точек и отбросив нелинейные члены, найдем корни характеристических уравнений полученных систем в виде

$$m_1 = \pm \sqrt{1 - R_m^2}; \quad m_2 = \pm \sqrt{1 - R_m^{-2}}. \quad (42)$$

Так как при чисто мнимых значениях корней характеристического уравнения особая точка может быть центром или фокусом (6) и в силу (41) зависимость  $\varphi = \varphi(h_r)$  двузначна, заключаем, что первая особая точка — центр при  $R_m > 1$ , а вторая — при  $R_m < 1$ . Следовательно, на фазовой плоскости  $h_r = f(\varphi)$  существуют замкнутые траектории (циклы), что отбрасывает периодическим решениям системы (40).

Каждому циклу отвечает определенное значение безразмерного периода  $\bar{T} = \frac{2\pi R}{n} \alpha = \frac{2\pi}{\lambda_n}$ . Из (40) следует:

$$\bar{T} = 2 \int_{\bar{h}_{r1}}^{\bar{h}_{r2}} \varphi^{-1} d\bar{h}_r, \quad (43)$$

где  $\bar{h}_{r1}$  и  $\bar{h}_{r2}$  — корни уравнения  $\varphi = 0$ , а под  $\varphi$  понимается положительная ветвь решения (41).

Приближенное выражение для периода получим при помощи найденного в [7] по методу малого параметра Линдстедта соотношения

$$\bar{T} = \frac{2\pi}{K} \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{5}{6} \gamma_1^2 - \frac{3}{4} \gamma_2 \right) \beta^2 \right]. \quad (44)$$

Здесь  $\beta$  — значение  $h_r$  при  $\varphi = 0$ , а коэффициенты  $K$ ,  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  могут быть найдены, если следующее из (33) выражение

$$\frac{d^2\bar{h}_r}{d\bar{y}^2} - \bar{h}_r - \frac{R_m^2\bar{h}_r}{R_m^2\bar{h}_r - 1} = 0$$

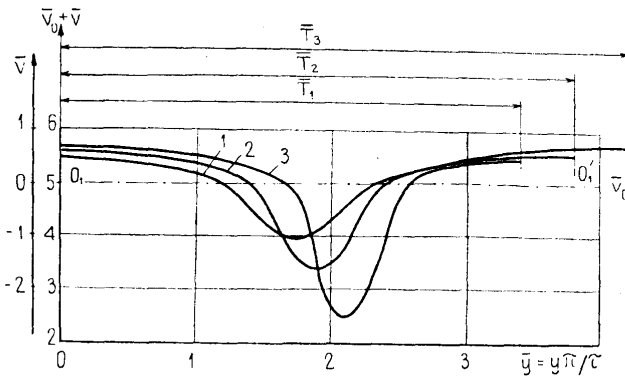


Рис. 3.

Рис. 3. Профиль осевой скорости в канале для трех значений периода  $\bar{T}_1, \bar{T}_2, \bar{T}_3$  (кривые 1, 2, 3 соответственно). Везде  $R_m = 2.2$ . Возмущение скорости  $\bar{v}$  отсчитывается от оси  $O_1O'_1$ , полная скорость  $\bar{v}_0 + \bar{v}$  — от оси  $\bar{y}$ .

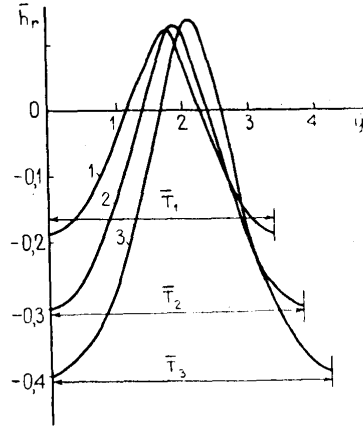


Рис. 4.

Рис. 4. Возмущения компоненты  $\bar{h}_r$  напряженности магнитного поля для трех значений периода  $\bar{T}_1, \bar{T}_2, \bar{T}_3$  (кривые 1, 2, 3 соответственно). Везде  $R_m = 2.2$ .

представить в виде

$$\frac{d^2 \bar{h}_r}{d\bar{y}^2} + k^2 \bar{h}_r + k^2 (\gamma_1 \bar{h}_r^2 + \gamma_2 \bar{h}_r^3 + \dots) = 0. \quad (45)$$

Выполнив необходимые преобразования, получим:

$$\bar{T} = \frac{2\pi}{\sqrt{R_m^2 - 1}} \left[ 1 + \frac{\beta^2 R_m^6}{24} \frac{(R_m^2 + 9)}{(R_m^2 - 1)^2} \right]. \quad (46)$$

Отметим, что при  $\beta \rightarrow 0$   $\bar{T} \rightarrow \frac{2\pi}{\sqrt{R_m^2 - 1}}$ ;  $R_m^2 \rightarrow (\bar{\lambda}_n^2 + 1) = R_{m \text{ кр } n}^2$ .

Результаты интегрирования системы уравнений (34) методом Рунге—Кутта на ЭЦВМ М-222 с начальными условиями  $\varphi_1 = 0$ ;  $\bar{h}_{r1} = \beta$  показаны на рис. 3 и 4. При варьировании начального значения  $\bar{h}_{r1}$  получаем набор решений, отличающихся периодом  $\bar{T}_i$ . Допустив, например, что  $v_s = 1.2v_0$  (скольжение  $s = 0.2$ ), имеем относительное значение невозмущенной осевой скорости  $\bar{v}_0 = 5$ . На рис. 3 отсчет возмущения скорости  $\bar{v}$  производится от оси  $O_1 - O'_1$ , а полной скорости  $\bar{v}_0 + \bar{v}$  — от оси  $\bar{y}$ . Видно, что величина возмущений (языков и провалов) может быть сравнима с параметрами невозмущенного потока, причем увеличение периода приводит к росту неоднородности. Отметим, что учет трения, вероятно, ослабит эту неоднородность.

**Выводы.** 1. Течение в коаксиальном канале цилиндрического индукционного МГД-насоса неустойчиво по отношению к малым возмущениям, если магнитное число Рейнольдса  $R_m$  больше некоторого критического значения  $R_{m \text{ кр } n}$ , вычисленного по формуле (31). Возможна лишь монотонная неустойчивость, а колебательные возмущения всегда затухают.

2. Построены без учета трения примеры стационарных вторичных течений, вызванных неустойчивостью исходного однородного течения (рис. 3 и 4). Возмущения осевой скорости (языков и провалов) могут быть сравнимы с невозмущенным значением скорости, увеличиваясь с ростом периода.

Авторы благодарят О. А. Лиелаусиса, обратившего их внимание на возможность существования неустойчивостей, и Е. И. Янтовского за ценные замечания.



## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гайлитис А., Лиелаусис О.* Неустойчивость однородного распределения скоростей в индукционной МГД-машине. — *Магнитная гидродинамика*, 1975, № 1, с. 87.
2. *Элькин А., Гехт Г., Толмач И.* Об устойчивости течения в коаксиальном зазоре цилиндрического индукционного насоса. — Тезисы VIII Рижского совещания по магнитной гидродинамике, II. Рига, «Зинатне», 1975, с. 76.
3. *Аладьев И. Т., Дворчик С. Е., Дронник Л. М., Стрижак В. Е., Толмач И. М., Элькин А. И., Янговский Е. И.* Результаты экспериментального исследования серии высокотемпературных жидкометаллических МГД-генераторов малой мощности. — Труды 6-й международной конференции по МГД-преобразованию, США, июнь 1975 г.
4. *Янговский Е. И., Толмач И. М.* Магнитогиродинамические генераторы. М., «Наука», 1972, с. 310, 351.
5. *Гаррис А.* Магнитогиродинамические течения в каналах. М., Издательство иностранной литературы, 1963, с. 98.
6. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров, М., «Наука», 1973, с. 39, 43, 296.
7. *Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М.* Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М., «Наука», 1972, с. 175, 138.

*Поступила:  
первоначально 12 марта 1975 г.,  
в окончательной редакции 11 сентября 1975 г.*