МАГНИТНАЯ ГИДРОДИНАМИКА, 1984, № 3, с. 11—14

УДК 537.84

В. А. Бернштам, Е. В. Поклонский, А. И. Элькин

УСТОЙЧИВОСТЬ ТОКОНЕСУЩЕЙ СТРУИ ПРОВОДЯЩЕЙ МАГНИТНОЙ ЖИДКОСТИ

Изучению устойчивости токонесущих струй проводящей жидкости посвящен ряд теоретических [1—3] и экспериментальных работ [4, 5]. В этих работах исследовались жидкости, не обладающие магнитными свойствами ($\mu/\mu_0=1$). В настоящее время получены [6] и активно исследуются [7] проводящие магнитные жидкости.

Данная статья посвящена рассмотрению устойчивости токонесущей струи несжимаемой проводящей невязкой магнитной жидкости относительно неустойчивости типа перетяжек.

Для малых значений напряженности поля **H**, когда магнитную проницаемость можно считать не зависящей от **H** и $\mathbf{B}\sim\mathbf{H}$, сила **f**, действующая на проводящую магнитную жидкость в магнитном поле, может быть записана следующим образом [8]:

$$\mathbf{f}=-\nabla p^*+\frac{1}{2}\nabla\left[\frac{B^2}{\mu^2}\rho\left(\frac{\partial\mu}{\partial\rho}\right)_T\right]-\frac{B^2}{2\mu^2}\nabla\mu+[\mathbf{j}\times\mathbf{B}], \tag{1}$$

где p^* — гидравлическое давление, ρ — плотность жидкости, $\mathbf{j}$ — плотность тока, μ — магнитная проницаемость жидкости, $\mathbf{B}$ — индукция магнитного поля.

Для несжимаемой жидкости соотношение (1) существенно упрощается и уравнение движения жидкости можно записать в виде, использованном при исследовании устойчивости токонесущей струи жидкого металла в работе [1]:

$$\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}+(\mathbf{u}\,\mathrm{grad})\mathbf{u}-\frac{1}{\mu\rho}(\mathbf{B}\,\mathrm{grad})\,\mathbf{B}=-\frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\,p, \tag{2}$$

где $p=p^*+B^2/2\mu$.

В отличие от работы [1], в дальнейшем будет учитываться, что μ может быть отлично от μ_0 (для жидких металлов $\mu/\mu_0\simeq 1$).

Уравнение (2) должно быть дополнено также уравнением индукции, уравнениями Максвелла и условием несжимаемости жидкости:

$$\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}+\mathrm{rot}\,[\mathbf{u}\times\mathbf{B}]=\eta\triangle\mathbf{B}, \tag{3}$$

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{B}=\mu\mathbf{j},\quad \mathrm{div}\,\mathbf{B}=0,\quad \mathrm{div}\,\mathbf{u}=0, \qquad (4),(5),(6)$$

где $\eta=1/\mu\sigma$, а σ — проводимость жидкости.

Рассмотрим устойчивость токонесущей струи проводящей магнитной жидкости относительно малых возмущений скорости **u** и магнитного поля **b**. Исследование будем проводить в цилиндрической системе координат, ось z которой совпадает с осью струи (рис. 1).

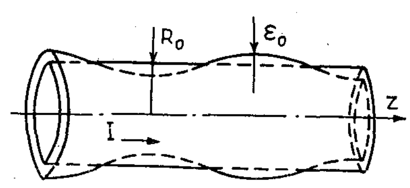

Рис. 1.

Индукцию магнитного поля будем искать в виде

$$\mathbf{B}=\mathbf{B}_0+\mathbf{b}, \tag{7}$$

где

$$B_0 = B_0^i = \frac{\mu I}{2\pi R_0^2} r \quad \text{для} \quad r < R_0,$$

$$B_0 = B_0^e = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad \text{для} \quad r > R_0$$

(R_0 — радиус невозмущенной струи, B_0 — индукция невозмущенного магнитного поля, I — полный ток). Невозмущенное магнитное поле имеет только φ-составляющую магнитной индукции, поэтому компоненты вектора $\mathbf{B}$ могут быть записаны следующим образом:

$$\mathbf{B} = (b_r, B_0 + b_\varphi, b_z). \tag{8}$$

Будем считать, что все возмущения пропорциональны $e^{i(qt+kz)}$:

$$\mathbf{u} \sim \mathbf{b} \sim e^{i(qt+kz)}, \quad R = R_0 + \varepsilon_0 e^{i(qt+kz)}, \tag{9}$$

где ε_0 — амплитуда возмущения поверхности.

Дальнейшее исследование производится в соответствии с методикой работы [1].

Расписывая по компонентам уравнения (2) и (3) и учитывая, что рассматриваемая задача симметрична по φ, получаем следующую систему уравнений для компонент векторов возмущений скорости и магнитного поля:

$$iqu_r + \frac{2B_0 b_\varphi}{\mu \rho r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \delta p}{\partial r}, \quad iqu_\varphi - \frac{2B_0 b_r}{\mu \rho r} = 0, \tag{10}$$

$$iqu_z = -\frac{ik}{\rho}\delta p, \quad iqb_r = \eta\left(\triangle b_r - \frac{b_r}{r^2}\right),$$

$$iqb_\varphi = \eta\left(\triangle b_\varphi - \frac{b_\varphi}{r^2}\right), \quad iqb_z = \eta \triangle b_z,$$

где δp — возмущение функции p, пропорциональное $e^{i(qt+kz)}$.

Учитывая уравнения (5) и (6), из системы уравнений (10), в частности, находим

$$b_\varphi = A_1 J_1(x), \tag{11}$$

$$u_r = A_2 I_1(y) + iA_1 \frac{I}{\pi R_0^2 \rho q (\gamma^2 + k^2)} J_1(x), \tag{12}$$

$$\delta p = -i\frac{\rho}{k} A_2 q I_0(y) + A_1 \frac{I\gamma}{\pi R_0^2 (\gamma^2 + k^2)} J_0(x), \tag{13}$$

где

$$x^2 = \gamma^2 r^2 = -(k^2 + iq/\eta) r^2, \quad y^2 = k^2 r^2,$$

$$A_1 = -\frac{I\mu}{\pi R_0^2 J_1(\gamma R_0)} \varepsilon_0 e^{i(qt+kz)},$$

$$A_2 = -\frac{i\varepsilon_0}{I_1(kR_0)}\left(\frac{I^2 k^2}{\pi^2 R_0^4 \rho q (\gamma^2 + k^2)} - q\right) e^{i(qt+kz)}.$$

Для получения дисперсионного уравнения для возмущений рассмотрим баланс внешнего и внутреннего давлений на поверхности струи. С внешней стороны на жидкость действует давление, обусловленное поверхностным натяжением p_T и внешним магнитным полем p^e. Это давление компенсируется внутренним давлением p. В отсутствие возмущения осуществляется баланс этих давлений в нулевом по возмущению приближении. При возмущении поверхности такой баланс должен выполняться на возмущенной поверхности. Таким образом, на поверхности струи всегда выполняется условие:

$$p = p_T + p^e. \tag{14}$$

Запишем выражения для всех величин, входящих в (14), раскладывая выражения для давлений в ряд в окрестности точки $r = R_0$:

$$p = p_0(R_0) + \frac{\partial p_0}{\partial r}\Big|_{r=R_0} \varepsilon_0 e^{i(qt+kz)} + \delta p(R_0). \qquad (15)$$

Первые два слагаемых в выражении (15) представляют собой два первых члена разложения в ряд в окрестности $r = R_0$ давления p_0 на границе. Последнее слагаемое в правой части (15) описывает возмущение этого давления в точке $r = R_0$.

Капиллярное давление на возмущенной поверхности струи описывается выражением

$$p_T = \frac{T}{R_0} - \frac{T}{R_0^2}(1 - k^2R_0^2)\,\varepsilon_0 e^{i(qt+kz)}, \qquad (16)$$

где T — коэффициент поверхностного натяжения. Давление внешнего магнитного поля на струю определяется соотношением

$$p^e = \frac{B_0^{e2}}{2\mu_0} + \frac{B_0^e}{\mu_0}\,\frac{\partial B_0^e}{\partial r}\Big|_{r=R_0} \varepsilon_0 e^{i(qt+kz)}. \qquad (17)$$

(При записи выражения (17) учитывалось, что φ-компонента возмущения индукции внешнего поля равна нулю; это является следствием того, что, несмотря на возмущения, полный ток, проходящий через сечение проводника, не изменяется.)

Подставляя выражения (15)—(17) в уравнение баланса давлений (14) и учитывая выражения для возмущения компонент вектора магнитной индукции и δp (11)—(13), после несложных преобразований получаем следующее дисперсионное уравнение:

$$\frac{q^2}{kR_0}\,\frac{I_0(kR_0)}{I_1(kR_0)} = (\mu - \mu_0)\frac{H_0^2}{\rho R_0^2} + i\,\frac{4\mu H_0^2}{\rho R_0^2}\,\frac{\eta}{qR_0^2}\times$$
$$\times\left(z\frac{J_0(z)}{J_1(z)} - kR_0\frac{I_0(kR_0)}{I_1(kR_0)}\right) - \frac{T}{\rho R_0^3}(1 - k^2R_0^2), \qquad (18)$$

где $z = \gamma R_0$, $H_0 = I/2\pi R_0$.

При $\mu = \mu_0$ уравнение (18) совпадает с полученным в [1] для токонесущей струи жидкого металла.

Дальнейшее рассмотрение проведем для жидкости малой проводимости, когда величина γ^2, входящая в аргументы функций Бесселя, становится вещественной. Это соответствует малости магнитного числа Рейнольдса, в котором роль характерной скорости и длины играют фазовая скорость $v_ф$ и длина волны возмущения L:

$$\mathrm{Re}_m = \sigma\mu v_ф L = \sigma\mu q/k^2 \ll 1. \qquad (19)$$

Это условие соответствует приближению «медленных» процессов, введенному в [9], когда инкремент возмущения мал.

Перепишем дисперсионное уравнение (18) в приближении «медленных» процессов, введя безразмерные переменные:

$$\bar{q}^2 = kR_0\frac{I_1(kR_0)}{I_0(kR_0)}[\bar{\mu} - 1 - \bar{T}(1 - k^2R_0^2)] + 4\bar{\mu}\,\frac{kR_0}{2}\left(\frac{I_2(kR_0)}{I_1(kR_0)} - \frac{I_1(kR_0)}{I_0(kR_0)}\right), \qquad (20)$$

где

$$\bar{q} = q/q_0,\quad q_0^2 = \mu_0 H_0^2/\rho R_0^2,\quad \bar{T} = T/\rho R_0^3 q_0^2,\quad \bar{\mu} = \mu/\mu_0.$$

Оценим параметр $\bar{T}$, определяющий отношение сил, связанных с поверхностным натяжением, к электромагнитным. Для ртутной струи с радиусом $R_0 = 1$ см для полного тока в 1 кА находим $\bar{T} = 0{,}06$. Таким

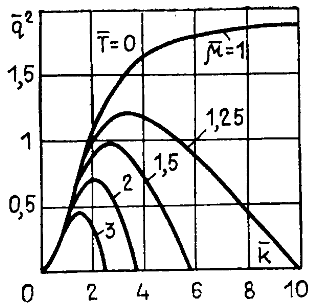

Рис. 2.

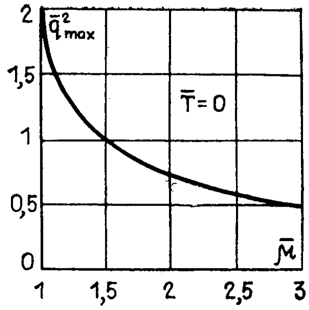

Рис. 3.

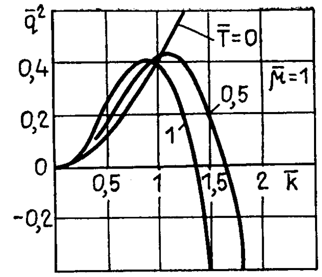

Рис. 4.

образом, уже при токе в тысячу ампер для данной струи электромагнитные силы значительно превосходят силы, связанные с поверхностным натяжением.

На рис. 2 приведены зависимости квадрата безразмерной частоты возмущения от волнового числа k при различных значениях параметра $\bar{\mu}$.

Как следует из рисунка, токонесущая струя магнитной жидкости оказывается более устойчивой, чем аналогичная струя жидкого металла.

График, изображенный на рис. 3, показывает зависимость максимального инкремента от магнитной проницаемости жидкости.

Выводы. 1. Наличие ферромагнитных свойств у токонесущей струи приводит к увеличению устойчивости струи по отношению к перетяжкам.

2. При $\bar{\mu}>1$ на дисперсионной кривой появляется максимум, находящийся в области малых волновых чисел возмущения, т. е. в исследованном случае струя проводящей магнитной жидкости ведет себя так же, как струя жидкого металла с большим поверхностным натяжением (рис. 4).

В заключение авторы благодарят С. Е. Дворчика за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Gupta A. S.* On the capillary instability of a jet carring an axial current with or without a longitudinal magnetic field. — Proc. Roy. Soc., Ser. A, 1964, vol. 278, N 1373 (T-6), p. 80—93.

2. *Варданян В. А., Оганесян Р. С.* К вопросу о стабилизации полой струи однородным магнитным полем. — Магнитная гидродинамика, 1967, № 1, с. 100—104.

3. *Бреус С. И.* Об устойчивости жидкого цилиндра с током при конечной проводимости. — ЖТФ, 1960, т. 30, вып. 9, с. 1030—1034.

4. *Гельфгат Ю. М., Ольшанский Р. А., Явнайст Г. А.* Исследование разрушения жидкометаллической струи под действием осевого тока. — Магнитная гидродинамика, 1973, № 2, с. 49—54.

5. *Васильев М. Н.* Распад струи жидкого металла в магнитном поле. — Магнитная гидродинамика, 1978, № 1, с. 137—140.

6. *Charles S. W., Popplewell J.* Progress in the development of ferromagnetic liquids. — IEEE Transactions on Magnetics, March 1980, vol.-mag-16, N 2, p. 172—177.

7. *Popplewell J., Charles S. W., Hoon S. R.* Aggregate formation in metalic ferromagnetic liquids. — IEEE Transactions on Magnetics, March 1980, vol.-mag.-16, N 2, p. 191—196.

8. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. — М.: Наука, 1982. 622 с.

9. *Брагинский С. И., Шафранов В. Д.* Плазменный шнур при наличии продольного магнитного поля. — В кн.: Физика плазмы и проблемы управляемых термоядерных реакций. М.: Изд. АН СССР, 1958, т. 3, с. 26—79.

Поступила 20 октября 1983 г.