

УДК 537.84

В. А. Бернштам, С. В. Козырев, Е. В. Незнамова, А. И. Элькин

УСТОЙЧИВОСТЬ ТЕЧЕНИЯ ПЛЕНКИ ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ В НАКЛОННОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Представляет интерес [1] рассмотреть влияние магнитного и электрического полей различной конфигурации на устойчивость течения пленки проводящей жидкости. В работах [2—4] изучалась устойчивость течения пленки в случаях, когда магнитное поле не влияет на профиль основного течения. В работах [5, 6] учтено влияние изменения профиля скорости в магнитном поле, перпендикулярном подложке. В работе [7] рассматривалась устойчивость при немалых магнитных числах $Re_m \approx 1$ и малых числах Гартмана в магнитном поле, произвольно ориентированном в плоскости течения.

В настоящей работе в безындукционном приближении рассмотрена устойчивость ламинарного течения пленки электропроводной жидкости в скрещенных электрическом и магнитном полях при произвольных числах Гартмана. Предполагается, что вектор магнитной индукции лежит в плоскости течения и наклонен под произвольным углом β к подложке, расположенной под углом θ к горизонту (рис. 1), а вектор электрического поля E_z перпендикулярен вектору магнитной индукции.

Рассматриваемое течение с учетом принятых допущений описывается следующей системой уравнений, записанных в безразмерном виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\sin \theta}{Fr^2} - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \Delta u - \\ &- K \frac{Ha^2}{Re} \sin \beta - u \frac{Ha^2}{Re} \sin^2 \beta + v \frac{Ha^2}{Re} \sin \beta \cos \beta, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\cos \theta}{Fr^2} - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re} \Delta v + \\ &+ K \frac{Ha^2}{Re} \cos \beta + u \frac{Ha^2}{Re} \sin \beta \cos \beta - v \frac{Ha^2}{Re} \cos^2 \beta, \end{aligned} \quad (1)$$

где Re и Ha — числа Рейнольдса и Гартмана.

Система уравнений (1) должна быть дополнена уравнением баланса жидкости в пленке

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_{\varepsilon}^1 u(y) dy = 0,$$

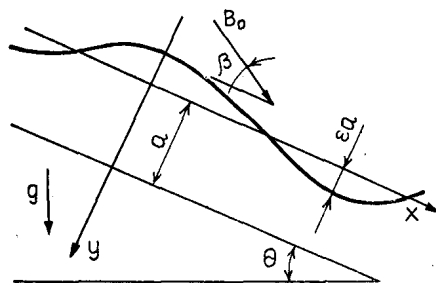


Рис. 1. К постановке задачи.

где ε — координата свободной поверхности (рис. 1), и граничными условиями, аналогичными использованным в [4]:

$$\begin{aligned} \text{I. } u(1) &= 0; & \text{II. } v(1) &= 0; \\ \text{III. } \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} &= 0, & y &= \varepsilon; \\ \text{IV. } -p + \frac{2}{Re} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{We} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} &= 0, & y &= \varepsilon. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $Re = \rho \bar{U} a / \nu$; $Ha^2 = B_0 a^2 \sigma / \nu$; $K = E_z / \bar{U} B_0$; $Fr^2 = \bar{U} / ga$; B_0 — модуль вектора магнитной индукции; a — толщина пленки при плоскопараллельном течении; \bar{U} — средняя скорость течения; $We = \rho a \bar{U} / T$ — число Вебера; ρ и σ — плотность и проводимость жидкого металла; ν — кинематическая вязкость; u, v — компоненты скорости жидкости.

Для невозмущенного течения распределения скорости и давления по толщине пленки, а также связь между определяющими параметрами имеют вид

$$U = \frac{\lambda}{\lambda - \text{th } \lambda} \left(1 - \frac{\text{ch } \lambda y}{\text{ch } \lambda} \right); \quad (3)$$

$$P = \left(\frac{\cos \theta}{Fr} - \frac{Ha^2}{Re} K \cos \beta - \frac{\lambda Ha \cos \beta}{(\lambda - \text{th } \lambda) Re} \right) y + \frac{Ha \cos \beta}{Re} \lambda \text{th } \lambda y; \quad (4)$$

$$Fr^2 = \frac{\sin \theta Re (\lambda - \text{th } \lambda)}{\lambda^2 (\lambda - (\lambda - \text{th } \lambda) K / \sin \beta)}; \quad \lambda = Ha \sin \beta. \quad (5), (6)$$

Коэффициент нагрузки K , входящий в уравнения (1), определяет, ускоряется ли пленка внешним током ($K / \sin \beta > 1$) и течет ли она между диэлектрическими стенками ($K / \sin \beta = 1$) или между короткозамкнутыми проводящими стенками ($K / \sin \beta = 0$).

Вопрос об устойчивости рассматриваемого течения в рамках линейной теории гидродинамической устойчивости сводится к решению уравнения Орра—Зоммерфельда [8], которое для данной задачи запишется в виде

$$\begin{aligned} \varphi^{IV} - 2\alpha^2 \varphi'' + \alpha^4 \varphi = i\alpha Re ((U - c)(\varphi'' - \alpha^2 \varphi) - U'' \varphi) + \\ + Ha^2 (\varphi'' \sin^2 \beta + i\alpha \sin^2 \beta \varphi' - \alpha^2 \cos^2 \beta \varphi), \end{aligned} \quad (7)$$

где $\varphi(y)$ — амплитуда функции тока возмущений скорости, которая задается в виде

$$\psi = \varphi(y) \exp i\alpha(x - ct),$$

где $\alpha = 2\pi a / \lambda_b$ — безразмерная длина волны, $c = c_r + ic_i$ — скорость распространения возмущений, являющаяся собственным значением рассматриваемой задачи. Мнимая часть c_i определяет скорость роста ($c_i > 0$) или затухания ($c_i < 0$) возмущений.

Граничные условия для амплитуды функции тока возмущений скорости имеют вид

$$\begin{aligned} \text{I. } \varphi(1) = 0; \quad \text{II. } \varphi'(1) = 0; \quad \text{III. } \varphi''(0) + \varphi(0) \left(\alpha^2 + \frac{U''(0)}{c'} \right) = 0; \\ \text{IV. } \varphi'''(0) - 3\alpha^2 \varphi(0) + Re i\alpha \varphi(0) \left(-\frac{p'(0)}{c'} + U'(0) - \right. \\ \left. - \frac{Ha^2 \sin \beta \cos \beta}{Re} \right) + i\alpha \varphi'(0) Re \left(c' - \frac{1}{Re} Ha^2 \sin \beta \right) + \\ \left. + i\alpha^3 \frac{Re \varphi(0)}{We c'} = 0; \quad c' = c - U(0). \end{aligned} \quad (8)$$

Безразмерное смещение ε из третьего и четвертого граничных условий исключено при помощи кинематического условия на свободной поверхности, число Fr исключено при помощи соотношения (5).

В дальнейшем ограничимся длинноволновыми возмущениями, как наиболее опасными [8].

Решение ищем в виде ряда по малому параметру α методом последовательных приближений [8]. Полагаем

$$\varphi = \varphi_0 + \alpha \varphi_1 + \alpha^2 \varphi_2 + \dots; \quad c = c_0 + \alpha c_1 + \alpha^2 c_2 + \dots$$

В отличие от ранее исследованных случаев в уравнении Орра—Зоммерфельда появляется член $\text{Ha}^2 i \alpha \sin 2\beta \varphi'$, отражающий взаимодействие тока, вызванного движением проводящей жидкости в поперечном магнитном поле с продольной компонентой поля. Эта же сила учтена в граничном условии (8).

Так как члены, учитывающие влияние силы $\mathbf{j} \times \mathbf{B}_0$, в уравнении и граничных условиях пропорциональны α , нулевое приближение полностью совпадает со случаем поперечного магнитного поля [6]:

$$c_0 = \frac{\lambda \text{th}^2 \lambda}{\lambda - \text{th} \lambda}; \quad \varphi_0 = \frac{2}{\lambda^2} (\text{ch} \lambda (y-1) - 1). \quad (9)$$

В первом приближении система уравнений и граничные условия будут иметь вид

$$\begin{aligned} \varphi_1^{IV} - \lambda^2 \varphi_1 = i \alpha \text{Re} ((U - c_0) \varphi_0'' - U'' \varphi_0) + i \alpha \text{Ha}^2 \sin 2\beta \varphi_0'; \\ \varphi_1(1) = 0; \quad \varphi_1'(1) = 0; \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \varphi_1'(0) + U''(0) \varphi_1(0) / c_0' - U''(0) \varphi_0(0) c_1 / c_0' = 0; \quad c_0' = c_0 - U(0); \\ \varphi_1'''(0) - \lambda^2 \varphi_1'(0) = -i \varphi_0(0) \left(\frac{dp}{dy}(0) \frac{\text{Re}}{c_0'} - \lambda \text{Ha} \cos \beta + i \text{Re} c_0' \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Общее решение этого уравнения запишем в виде

$$\varphi_1(y) = \varphi^* + A_1 \text{ch} \lambda y + B_1 \text{sh} \lambda y + C_1 y + D_1, \quad (12)$$

где $\varphi^* = y(A \text{sh} \lambda y + B \text{ch} \lambda y) / 2\lambda^3$.

Постоянная интегрирования положена равной нулю, так же как и в нулевом приближении [8]. После подстановки (9), (12) в (11) получим систему

$$A_1 \text{ch} \lambda + B_1 \text{sh} \lambda + C_1 = A_2, \quad A_1 \text{sh} \lambda + B_1 \text{ch} \lambda + C_1 / \lambda = A_3, \quad A_1 = A_4(c_1), \quad C_1 = A_5.$$

Здесь $A_2 = -(B \text{ch} \lambda + A \text{sh} \lambda) / 2\lambda^3$,

$$A_3 = -(B \text{ch} \lambda + A \text{sh} \lambda) / 2\lambda^4 - (B \text{sh} \lambda - A \text{ch} \lambda) / 2\lambda^3,$$

$$A_4 = A (\text{ch} \lambda - 1) / \lambda^4 + c_1 2 \text{ch}^2 \lambda (\lambda - \text{th} \lambda) / \lambda^3,$$

$$\begin{aligned} A_5 = \frac{B}{\lambda^3} + 2i\alpha \left(\frac{(\lambda - \text{th} \lambda) \text{ch}^2 \lambda}{\lambda^5} \frac{\text{Re} \cos \theta}{\text{Fr}^2} + \right. \\ \left. + \text{Ha}^2 \cos \beta K \frac{(\lambda - \text{th} \lambda) \text{ch}^2 \lambda}{\lambda^5} - \frac{\text{Re} \text{sh} \lambda (\text{ch} \lambda - 1)}{\lambda^2 (\lambda - \text{th} \lambda) \text{ch}^2 \lambda} + \right. \\ \left. + \text{Ha} \cos \beta \frac{(\text{ch} \lambda - 1)^2}{\lambda^3} \right), \end{aligned}$$

где $A = -i\alpha \text{Ha}^2 \sin 2\beta \frac{2 \text{sh} \lambda}{\lambda}$;

$$B = -2i\alpha \text{Re} \frac{\lambda \text{sh} \lambda}{(\lambda - \text{th} \lambda)^2 \text{ch}^2 \lambda} + i\alpha \text{Ha}^2 \sin 2\beta \frac{2 \text{ch} \lambda}{\lambda}.$$

Решив систему относительно c_1 , получим

$$c_1 = ic_i = i \left(\frac{\operatorname{Re} (3 \operatorname{sh} \lambda \operatorname{ch}^2 \lambda (\lambda - \operatorname{th} \lambda) - \lambda \operatorname{sh}^3 \lambda)}{2 \operatorname{ch}^5 \lambda (\lambda - \operatorname{th} \lambda)^2} - \frac{\operatorname{ctg} \theta (\lambda - (\lambda - \operatorname{th} \lambda) K / \sin \beta)}{\lambda} + \frac{\operatorname{Ha}^2 \cos \beta K (\lambda - \operatorname{th} \lambda)}{\lambda^3} - \frac{\operatorname{Ha} \cos \beta (\operatorname{ch}^2 \lambda (\lambda - \operatorname{th} \lambda) + 2 (\lambda - \operatorname{sh} \lambda) \operatorname{ch} \lambda)}{\lambda (\lambda - \operatorname{th} \lambda)} \right).$$

Из условия нейтральной устойчивости $c_i = 0$ получим выражение для критического числа Рейнольдса

$$\operatorname{Re}_{\text{кр}} = \operatorname{ctg} \theta \frac{2 \operatorname{ch}^2 \lambda (\lambda - \operatorname{th} \lambda)^2 (\lambda - (\lambda - \operatorname{th} \lambda) K / \sin \beta)}{\operatorname{th} \lambda (3 (\lambda - \operatorname{th} \lambda) - \lambda \operatorname{th}^2 \lambda)} - \frac{\operatorname{Ha}^2 \cos \beta K 2 (\lambda - \operatorname{th} \lambda) \operatorname{ch}^2 \lambda}{\lambda^3 \operatorname{th} \lambda (3 (\lambda - \operatorname{th} \lambda) - \lambda \operatorname{th}^2 \lambda)} + \operatorname{Ha} \cos \beta \frac{2 (\lambda - \operatorname{th} \lambda) (\operatorname{ch}^2 \lambda (\lambda - \operatorname{th} \lambda) + 2 (\lambda - \operatorname{sh} \lambda) \operatorname{ch} \lambda)}{\lambda \operatorname{th} \lambda (3 (\lambda - \operatorname{th} \lambda) - \operatorname{th}^2 \lambda)}. \quad (13)$$

Полученное выражение в предельных случаях совпадает с найденными ранее в работах [6, 8, 9].

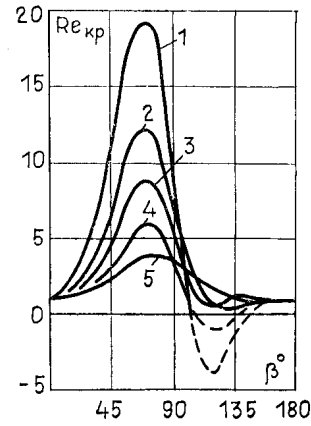
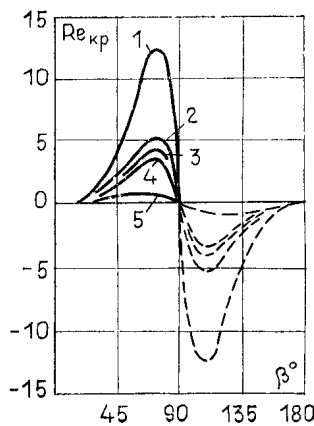
Первое слагаемое выражения (13) характеризует влияние перпендикулярной подложке составляющей вектора магнитной индукции и аналогично выражению, полученному в работе [6]. Остальные слагаемые отражают влияние взаимодействия токов, вызванных наличием поперечной составляющей вектора магнитной индукции и электрическим полем с продольной составляющей индукции.

Кривые нейтральной устойчивости, полученные с помощью соотношения (13), приведены на рис. 2—5.

Из рис. 2 следует, что наклонное магнитное поле в отличие от продольного или перпендикулярного подложке может стабилизировать пленку, стекающую по вертикальной стенке. При этом область углов наклона вектора индукции магнитного поля к подложке, для которых стабилизация возможна, заключена между малыми острыми углами и углом $\beta = 90^\circ$. Зависимость $\operatorname{Re}_{\text{кр}} = \operatorname{Re}_{\text{кр}}(\beta)$ нечетна относительно $\beta = 90^\circ$ и имеет максимум при $\beta = 70-80^\circ$. С увеличением коэффициента нагрузки K критические числа Рейнольдса уменьшаются. При этом поверхность пленки может быть стабильной при $K > 1$, когда на невозмущенную пленку действует суммарная отрывающая от подложки сила.

Рис. 2. Зависимость критического числа Рейнольдса от угла β . $\theta = 90^\circ$; K и Ha : 1 — 1 и 1,5; 2 — 0 и 1,3; 3 — 1 и 1,3; 4 — 2 и 1,3; 5 — 1 и 1.

Рис. 3. Зависимость критического числа Рейнольдса от угла β . $\theta = 30^\circ$; K и Ha : 1 — 1 и 1,5; 2 — 0 и 1,3; 3 — 1 и 1,3; 4 — 2 и 1,3; 5 — 1 и 1.



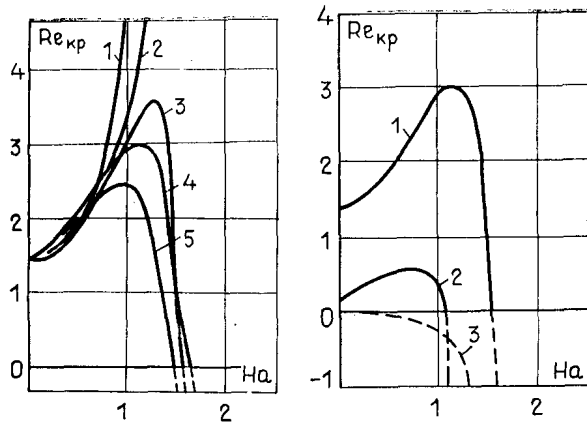


Рис. 4. Зависимость критического числа Рейнольдса от числа Гартмана. $\theta = 30^\circ$, K и β : 1 — 1 и 18° ; 2 — 1 и 90° ; 3 — 1 и 108° ; 4 — 1 и 99° ; 5 — 1,5 и 108° .

Рис. 5. Зависимость критического числа Рейнольдса от числа Гартмана. $\beta = 99^\circ$; θ : 1 — 30° ; 2 — 60° ; 3 — 90° .

Такого рода зависимость может быть, по-видимому, качественно объяснена взаимодействием ряда возмущенных электрообъемных сил. В их числе силы, обусловленные только составляющей магнитного поля, перпендикулярной подложке [6], силы, возникающие из-за взаимодействия возмущенного тока, вызванного электрическим полем, с продольной составляющей индукции, и, наконец, силы, причиной которых является взаимодействие с продольным магнитным полем индуцированных токов, возникших при взаимодействии продольных возмущений скорости с поперечным магнитным полем.

Последняя сила, пропорциональная $\sin 2\beta$, в приведенных примерах преобладает, что качественно объясняет характер кривых на рис. 2.

Для пленки, стекающей по подложке, расположенной под углом к горизонту (рис. 3), область стабильности по углу β расширяется, так как в этом случае возможны устойчивые течения при $\beta = 90^\circ$. С ростом числа Гартмана (рис. 4) при $\beta < 90^\circ$ значение критического числа Рейнольдса увеличивается, в то время как при $\beta > 90^\circ$ функция $Re = Re(Ha)$ имеет максимум, а при достаточно большом числе Гартмана течение пленки становится неустойчивым.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Муравьев Е. В. Контактные устройства диверторных и лимитерных систем реакторов-токамаков. 1. Устройства с жидкометаллической рабочей поверхностью. — Вопросы атомной науки и техники. Термоядерный синтез. 1980, вып. 2, с. 57—64.
2. Коловандин Б. А. Устойчивость течения проводящей жидкости со свободной поверхностью при наличии магнитного и электрического полей. — Прикладная механика, 1965, т. 1, с. 95—105.
3. Коловандин Б. А. К вопросу об устойчивости течения электропроводной жидкости со свободной поверхностью. — В кн.: Техническая электромагнитная гидродинамика. М., 1967, с. 368—376.
4. Бернштам В. А., Козырев С. В., Элькин А. И. Устойчивость течения пленки проводящей жидкости в продольном магнитном поле. — Магнитная гидродинамика, 1981, № 2, с. 37—41.
5. Din-Yu Hsien. Stability of a conducting fluid flowing down an inclined plane in a magnetic field. — Phys. Fluids. 1965, vol. 8, N 10, p. 1785—1791.
6. Козырев С. В., Элькин А. И. Устойчивость течения тонких пленок электропроводной жидкости в скрещенных магнитном и электрическом полях. — Магнитная гидродинамика, 1981, № 4, с. 57—60.
7. Ладиков Ю. П. Устойчивость течения проводящей жидкости, стекающей по наклонной плоскости в присутствии магнитного поля. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1966, № 1, с. 3—8.
8. Yih C.-S. Stability of liquid flow down an inclined plane. — Phys. Fluids, 1963, vol. 6, N 3, p. 321—334.
9. Crowley I. M. Effect of electromagnetic force on the stability of liquid films. — Industrial and Engineering Chemistry, 1967, vol. 6, N 2, p. 243—246.

Поступила 23 октября 1984 г.