

УДК 537.84:621.313.53

С. Ю. Реуцкий

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВУХМЕРНОГО ТЕЧЕНИЯ В ПЛОСКОМ ИНДУКЦИОННОМ НАСОСЕ

В зазоре бесконечного двухстороннего индуктора расположен канал шириной $2a$, заполненный жидким металлом с проводимостью σ (рис. 1). Воздушный зазор полагается равным толщине слоя металла 2δ . На внутренней поверхности индуктора, лишенной пазов, расположена линейная токовая нагрузка $\mathbf{A} = (0, A_y(x, t), 0)$. Функция $A_y(x, t)$ равна нулю вне обмотанной зоны $-0,5L_A \leq x \leq 0,5L_A$ и в каждый момент времени удовлетворяет условию $\int_{-0,5L_A}^{0,5L_A} A_y(x, t) dx = 0$.

1. Уравнение индукции. При расчете магнитного поля используем приближение тонкого зазора (см., например, [1, с. 167]), учитывая лишь z -компоненту индукции $\mathbf{B} = (0, 0, B_z(x, y, t))$. Полагая процессы во времени гармоническими с частотой ω и переходя к комплексным амплитудам, запишем уравнение индукции в безразмерном виде:

$$i\dot{b}_* + u_* \partial \dot{b}_* / \partial x_* + v_* \partial \dot{b}_* / \partial y_* = \text{Rm}^{-1} \Delta \dot{b}_* + u_* j_{0*} - i\dot{B}_{0*}. \quad (1)$$

Здесь $\dot{b}_*(x, y)$ — комплексная амплитуда индуцированного, а $\dot{B}_{0*}(x)$ — внешнего поля; $j_{0*} = \dot{A}_0(x)/\delta$ — комплексная амплитуда стороннего тока; $A_y(x, t) = \text{Real}(A_0(x) e^{i\omega t})$; u, v — компоненты вектора скорости $\mathbf{v} = (u, v, 0)$. При выводе (1) предполагается, что вектор \mathbf{v} от времени не зависит или меняется за период времени, значительно больший $2\pi/\omega$. $\text{Rm} = \sigma \mu_0 (\tau/\pi) v_s$ — магнитное число Рейнольдса; $v_s = \omega/\alpha$ — синхронная скорость; $\alpha = \pi/\tau$; τ — полюсное деление. В уравнении (1) все величины обезразмерены с помощью следующих характерных значений:

$$T = 1/\omega, \quad L = 1/\alpha, \quad U = v_s, \quad B = B_m, \quad (2)$$

где B_m — амплитудное значение индукции внешнего поля. Комплексная амплитуда $\dot{B}_0(x)$ определена соотношениями (см. [9, с. 71—78])

$$d\dot{B}_0/dx = -j_0(x) = -\dot{A}_0(x)/\delta, \quad \int_{-0,5L_x}^{0,5L_x} \dot{B}_0(x) dx = 0; \quad (3)$$

L_x — полная длина канала. Здесь и ниже звездочки у безразмерных величин не ставим.

На границе области $x = \pm 1/2 L_x$ выполняется условие равенства нулю суммарного магнитного поля

$$\dot{b}(\pm 0,5L_x, y) = -\dot{B}_0(\pm 0,5L_x). \quad (4)$$

На прямой $y=0$ ставим условие симметрии, рассматривая только часть канала $y \geq 0$:

$$\partial \dot{b} / \partial y = 0. \quad (5)$$

На боковой изоляционной стенке при $y=a$ отсутствует компонента индуциро-

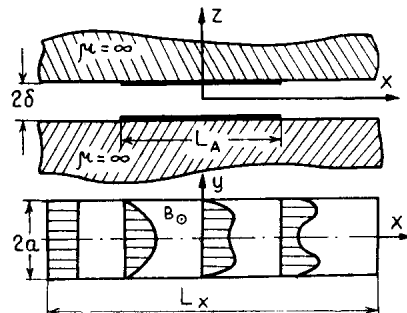


Рис. 1. Постановка задачи.

важного тока j_y и, следовательно, вдоль границы $y=a$ выполняется $\delta b/\delta x=0$. Отсюда, учитывая (4), следует, что

$$\dot{b}(x, y=a) = -\dot{B}_0(0,5L_x). \quad (6)$$

2. Модель плоского движения. Уравнение плоского движения жидкого металла в канале запишем в виде

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \Delta u - C u \sqrt{u^2 + v^2} - 0,5 \text{Al Real} \left((B^*_0 + \dot{b}^*) \frac{\partial \dot{b}}{\partial x} \right); \quad (7)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \Delta v - C v \sqrt{u^2 + v^2} - 0,5 \text{Al Real} \left((B^*_0 + \dot{b}^*) \frac{\partial \dot{b}}{\partial y} \right). \quad (8)$$

Здесь Re — гидродинамическое число Рейнольдса; Al — число Альфвена; C — коэффициент трения о широкие стенки в законе трения Шези; $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$. Уравнения движения (7), (8), так же как и (1), обезразмерены с использованием характерных значений (2), давление обезразмерено величиной ρU^2 . Верхняя звездочка означает здесь комплексное сопряжение.

Компоненты скорости связаны уравнением неразрывности

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (9)$$

Для численного решения (1), (7), (8) перейдем к завихренности ξ и функции тока ψ

$$\xi = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}, \quad u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (10)$$

В этих переменных уравнение неразрывности удовлетворяется точно, а (7), (8) переходят в систему

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{1}{\text{Re}} \Delta \xi - C \left(\frac{\partial}{\partial y} (u \sqrt{u^2 + v^2}) - \frac{\partial}{\partial x} (v \sqrt{u^2 + v^2}) \right) - 0,5 \text{Al Real} \left(j^*_0 \frac{\partial \dot{b}}{\partial y} \right), \quad (11)$$

$$\Delta \psi = \xi. \quad (12)$$

Во входном сечении задаем однородный профиль скорости:

$$u = u_{\text{ср}}, \quad v = 0, \quad \psi = y u_{\text{ср}}, \quad \xi = 0. \quad (13)$$

На твердой стенке выполняется условие непротекания

$$v = 0, \quad \psi = a u_{\text{ср}} \quad (14)$$

и условие прилипания $u=0$, для аппроксимации которого в переменных $\xi-\psi$ при численном счете применяется формула Тома [2]. На линии $y=0$ ставим условие симметрии:

$$\partial u/\partial y = 0, \quad v = 0, \quad \xi = 0, \quad \psi = 0. \quad (15)$$

На выходе из расчетной области ставим условие установления:

$$\partial \xi/\partial x = 0, \quad \partial^2 \psi/\partial x^2 = 0. \quad (16)$$

Для численного решения системы уравнений (1), (11), (12) вводится равномерная сетка (x_i, y_j) , $i=1, \dots, N$, $j=1, \dots, M$ размером

65×21 и 129×21. Обмотки содержат от $2n=2$ до $2n=12$ полюсов в активной зоне. На одно полюсное деление приходится, как правило, 9 узлов в продольном направлении (отдельные расчеты велись с 17 узлами на полюс). Расстояние от конца активной зоны до границы расчетной области составляет не менее 1,5 полюсного деления. Для аппроксимации уравнения индукции и переноса завихренности использована схема Самарского [3], а уравнение Пуассона (12) аппроксимируется центрально-разностной схемой. Результирующая система алгебраических уравнений решалась итерационным методом Гаусса—Зейделя с использованием ускоряющих релаксационных множителей по методике [4]. Итерации проводили последовательно в узлах с возрастающими индексами (i, j) , вычисляя новые значения сеточных функций в такой последовательности: сначала b_{ij} , затем ξ_{ij} , потом ψ_{ij} . Итерации продолжались до выполнения критерия

$$\max_{ij} (|\Delta^{(n)}\psi_{ij}|, |\Delta^{(n)}\xi_{ij}|, |\Delta^{(n)}b_{ij}|) < \varepsilon,$$

где $\Delta^{(n)}\psi_{ij}$, $\Delta^{(n)}\xi_{ij}$, $\Delta^{(n)}b_{ij}$ вычисляются следующим образом:

$$\Delta^{(n)}\psi_{ij} = \begin{cases} (\psi_{ij}^{(n)} - \psi_{ij}^{(n-1)}) / \psi_{ij}^{(n)}, & |\psi_{ij}^{(n)}| > \varepsilon; \\ \psi_{ij}^{(n)} - \psi_{ij}^{(n-1)}, & |\psi_{ij}^{(n)}| < \varepsilon. \end{cases}$$

Величина ε , как правило, принималась равной 10^{-3} . На рис. 2 показано образование зоны вихревого движения в центральной части канала четырехполюсной машины с параметрами $a/\tau=1$; $Rm=12,7$; $Al=4$; $s=0,8$; $Re=200$ (рис. 2а) и $Re=100$ (рис. 2б). В случае менее вязкой жидкости $Re=200$ вихревое движение интенсивнее, зона обратного течения, в отличие от модели полосок, занимает часть активной зоны канала. На рис. 3 представлен график функции тока для четырехполюсной машины с параметрами: $a/\tau=1$; $Rm=6,4$; $Al=2$; $Re=100$ в режиме запертого канала $s=1$. Здесь же показана картина растекания индуцированного тока, полученная следующим образом. Безразмерные компоненты

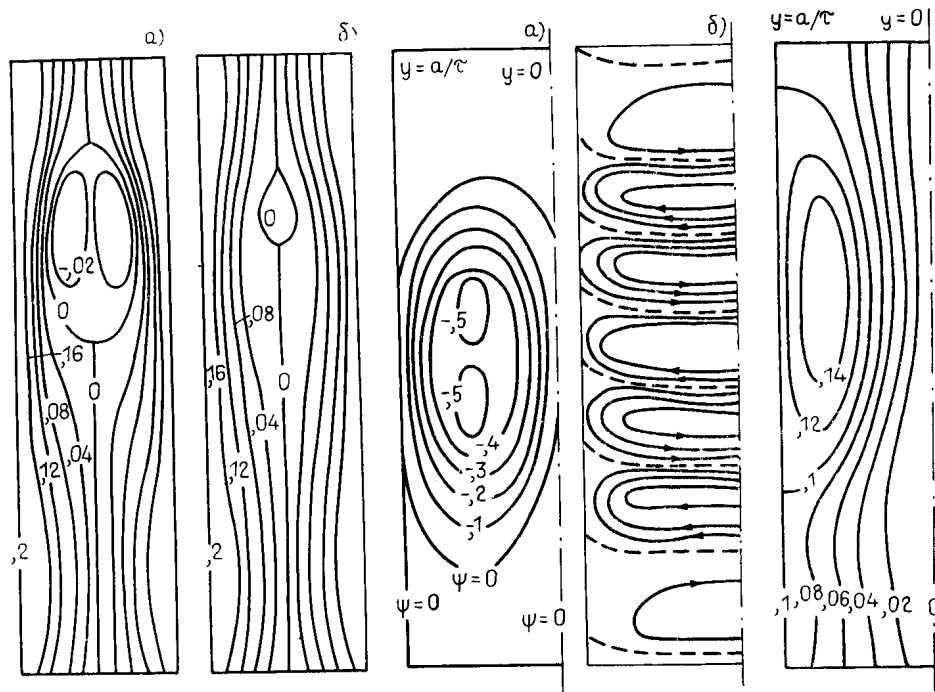


Рис. 2. Гидродинамические линии тока.

Рис. 3. Запертый канал: а — гидродинамические линии тока; б — растекание электрического тока. Штриховые линии соответствуют $\text{Real } b=0$.

Рис. 4. Гидродинамические линии тока.

плотности тока и индукция \vec{b} связаны зависимостью $j_x = \partial b / \partial y$; $j_y = -\partial b / \partial x$. Поэтому линия $b = \text{const}$ является линией тока для векторного поля \vec{j} . На рис. 3б построено семейство линий $\text{Real } \vec{b} = \text{const}$, т. е. линии тока в момент времени $t=0$.

На рис. 2 и 3 нет областей обратного течения у твердых стенок, хотя электромагнитная сила обращается на них в нуль. Это объясняется рядом факторов: малыми числами Re , схемной вязкостью аппроксимации, крупным шагом Δy (эффект «проваливается» сквозь сетку). На рис. 4 показаны линии тока для течения с параметрами $a/\tau=0,5$; $\text{Rm}=3,2$; $\text{Al}=6$; $\text{Re}=650$ в режиме $s=0,8$, где область обратного течения у стенок имеет место. Здесь, во-первых, взято большее число Re , во-вторых, параметры a/τ и Rm изменены таким образом, чтобы электромагнитная сила менялась возле стенки не так резко.

Во всех расчетах принято, что безразмерный коэффициент C в члене трения уравнения (11) не зависит от магнитного поля и режима течения. Без магнитного поля между C и коэффициентом трения λ можно установить зависимость: $C = (\lambda/8)\Pi L/A$, где Π — смоченный периметр, A — площадь сечения канала, L — характерный размер длины, в данном случае $1/\alpha$. Для прямоугольного канала эта зависимость приобретает вид $C = (\lambda/8)(1/\alpha a + 1/\alpha d)$. Если выбрать для коэффициента λ значение в пределах $0,03 \div 0,04$, то величина C будет того же порядка. Во всех расчетах принято $C=0,04$.

3. Приближение пограничного слоя. Рассмотрим приближенные уравнения движения, промежуточные между моделью полосок и системой уравнений (7), (8). Это упрощение основано на приближении пограничного слоя [5]. Предполагаем, что всюду в потоке выполняются условия $v \ll u$, $\partial^2 u / \partial x^2 \ll \partial^2 u / \partial y^2$. Безразмерные уравнения движения в приближении пограничного слоя запишем в виде

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - Cu|u| - 0,5 \text{Al Real} \left((\dot{B}^*_0 + \dot{b}^*) \frac{\partial \dot{b}}{\partial x} \right); \quad (17)$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial y} - 0,5 \text{Al Real} \left((\dot{B}^*_0 + \dot{b}^*) \frac{\partial \dot{b}}{\partial y} \right). \quad (18)$$

Второе уравнение означает, что градиент давления поперек канала уравновешен электромагнитной силой, поэтому p здесь является функцией обеих координат x и y . Можно ввести новую переменную φ , которая будет зависеть только от x и вместе с полем \vec{b} полностью определять давление. Запишем (18) в виде

$$\frac{\partial}{\partial y} (-p - 0,5 \text{Al} (\text{Real} (\dot{B}^*_0 \dot{b}) + 0,5 |\dot{b}|^2)) = 0.$$

Это возможно, так как $\partial \dot{B}_0 / \partial y = 0$. Отсюда следует:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \varphi(x) + 0,5 \text{Al} \left(\text{Real} \left((\dot{B}^*_0 + \dot{b}^*) \frac{\partial \dot{b}}{\partial x} \right) + \text{Real} \left(\frac{\partial \dot{B}^*_0}{\partial x} \dot{b} \right) \right). \quad (19)$$

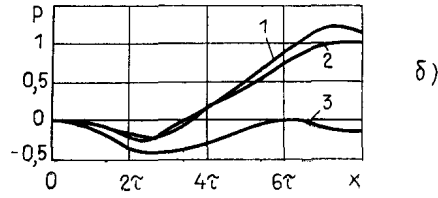
Подставив это выражение в (17), получим:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - Cu|u| - 0,5 \text{Al Real} (j^*_0 \dot{b}) + \varphi(x). \quad (20)$$

Функция $\varphi(x)$ в каждом сечении находится из условия постоянства расхода:

$$\frac{1}{a} \int_0^a u(x, y) dy = u_{\text{ср}}. \quad (21)$$

Рис. 5. Приближение пограничного слоя: а — профили скорости; б — распределение давления; 1 — $s=0,6$; 2 — $s=0,5$, 3 — $s=0,1$.



В начальном сечении задается однородный профиль и изучается его эволюция по длине канала до выходного сечения. Условия типа (16) не ставятся. На твердой стенке выполняется условие «прилипания» $u=0$, на оси $y=0$ — условие симметрии (15).

Компонента скорости $v(x, y)$ определяется из уравнения неразрывности (9).

Уравнение (20) аппроксимируется на равномерной сетке и решается численно совместно с уравнением индукции (1). Вычислительные аспекты решения уравнений типа (20), в том числе и для течения в прямых трубах, рассмотрены в [3, 6]. По найденному полю скоростей и функции φ , используя (19), находим распределение давления:

$$p(x, y) = p(-0,5L_x, y) - \int_{-0,5L_x}^x \varphi(s) ds - 0,5Al(\text{Real}(\dot{B}_0^* \delta) + 0,5|\delta|^2). \quad (22)$$

В случае, когда рассматривается только перепад давления между входным и выходным сечениями, где магнитное поле отсутствует, (22) можно упростить:

$$\Delta p = p(0,5L_x, y) - p(-0,5L_x, y) = - \int_{-0,5L_x}^{+0,5L_x} \varphi(s) ds. \quad (23)$$

На рис. 5а изображено изменение профиля скорости в канале четырехполюсной машины с параметрами $a/\tau=2$, $Rm=6,4$, $Re=100$, $Al=6$ для скольжения $s=0,5$, а на рис. 5б — изменение давления на оси канала, построенное по формуле (22) численным интегрированием. Кривая 3 соответствует режиму $s=0,1$ и полностью расположена в области $p<0$, причем за нуль принято давление на входном сечении канала. Электромагнитная сила мала, так что отрицательный перепад давления расходуется на преодоление сил трения в канале. Здесь же даны распределения давления при $s=0,5$ и $0,6$, соответствующие плоскому режиму и показывающие, что в области входа металла в активную зону давление падает ниже своего значения во входном сечении. Этот эффект, замеченный экспериментально, например в [7], в [8, 9] исследовался аналитически в электродинамическом приближении. Провал давления связывался там с выталкивающей силой F^- , действующей на набегающем конце индуктора.

На рис. 6 для насоса с параметрами $a/\tau=1$; $Rm=12,6$; $Re=100$; $Al=6$; $s=0,4$ построено распределение x -компоненты электромагнитной силы в поперечных сечениях (рис. 6а) и по длине канала (рис. 6б). В центральной части активной зоны распределение достаточно однородно, некоторая М-образность связана с размагничивающим действием токов. На входе и выходе из активной зоны профиль скорости резко неоднороден. На рис. 6б показана зависимость электромагнитной силы от продольной координаты x . Кривая 1 соответствует оси симметрии канала, кривая 2 — линии на расстоянии $a/5$ от боковой стенки.

Сравнение результатов численного решения системы уравнений (11) и (12) и уравнений пограничного слоя (20), (21) показало, что профили скорости и интегральные характеристики практически совпадают даже в режимах, близких к образованию возвратного течения в канале.

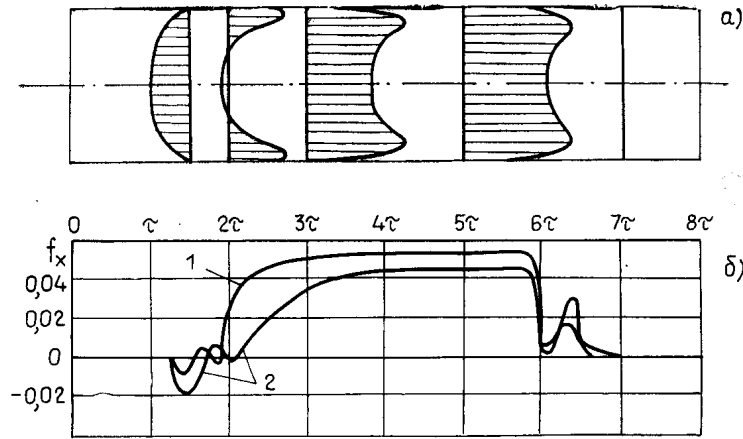


Рис. 6. Распределение x -компоненты плотности электромагнитной силы: a — в поперечном сечении, b — вдоль канала.

Проводя дальнейшее упрощение уравнений движения (17), (18), полагаем, что $v=0$, $\partial p/\partial y=0$, $\partial p/\partial x=\text{const}$, и переходим к модели полосок. Осредняя (17) по длине активной зоны, получим:

$$0 = -\frac{dp}{dx} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{d^2u}{dy^2} - Cu|u| - 0,5 Al \frac{1}{L_A} \int_{-0,5L_A}^{+0,5L_A} \text{Real} \left((\hat{B}_0^* + \hat{b}^*) \frac{\partial \hat{b}}{\partial x} \right) dx. \quad (24)$$

Здесь в отличие от модели бесконечно длинной машины в распределении магнитного поля учитывается концевой эффект. Поэтому интеграл в (24) не упрощается. На рис. 7 для течения с параметрами $a/\tau=1$; $\text{Rm}=6,4$; $\text{Re}=100$; $Al=2, 4, 6$ дано сравнение интегральных характеристик, рассчитанных по трем моделям. Уравнение индукции во всех случаях одно и то же. Приближение пограничного слоя и модель (11), (12) дают практически совпадающие результаты во всем диапазоне скольжений. На рис. 7 этим моделям отвечают сплошные кривые. Штриховыми линиями нанесены $p(Q)$ -характеристики, рассчитанные с использованием уравнения движения (24). Три пары кривых соответствуют трем значениям $Al=2, 4, 6$. Расхождение между характеристиками в приближении полосок и по $\xi-\psi$ модели особенно велико в режиме больших скольжений. Это связано с тем, что в модели полосок перестройка профиля скорости происходит сразу по всей длине канала (включая и области, лежащие за пределами активной зоны), что приводит к завышению потерь трения.

Заключение. Сравнивая обе модели, следует отметить, что расчеты течения с уравнением движения в форме (20) требуют в 5÷6 раз меньшего времени, чем расчеты по $\xi-\psi$ модели (11), (12).

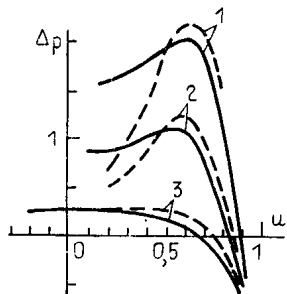


Рис. 7. Интегральные характеристики. Сплошные кривые — модель и приближение пограничного слоя; штриховые кривые — модель полосок (уравнение (24)). Al : 1 — 2, 2 — 4, 3 — 6.

Вместе с тем приближение пограничного слоя позволяет рассмотреть совместную работу насоса с внешней гидравлической сетью. Для этого следует заменить в (23) перепад давления Δp на гидравлическую характеристику контура и использовать полученное соотношение для определения расхода через насос. Эта же модель позволяет рассчитывать течение в канале с перегородками.

Краевые условия (4) для магнитного поля безусловно справедливы при $x = \pm \infty$. Их постановка на конечном расстоянии от активной зоны является некоторым приближением.

Однородный профиль $u = u_{\text{ср}}$, заданный на входе в расчетную область, в переходной зоне развивается к профилю $u(y)$, являющемуся решением (7) при $v = 0$, $f_{\text{эм}} = 0$.

Численное моделирование в этой работе носит качественный характер. Более строгий учет гидродинамики требует введения неравномерной сетки и модели турбулентного переноса импульса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Круминь Ю. К. Основы теории и расчета устройств с бегущим магнитным полем. Рига: Зинатне, 1983. 278 с.
2. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980. 616 с.
3. Пасконов В. М., Полежаев В. И., Чудов Л. А. Численное моделирование процессов тепло- и массообмена. М.: Наука, 1984. 284 с.
4. Botta E. F. F., Veldman A. E. P. A local-relaxation method for solving convective-diffusion equations. — Lecture Notes in Physics, 1982, N 170, p. 149—154.
5. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1969. 742 с.
6. Симуни Л. М., Чудов Л. А. Численное исследование течения вязкой жидкости в удлиненных областях. — В кн.: Численные методы и их реализация на ЭВМ. Иваново: Изд. Ив. ГУ, 1978, с. 5—63.
7. Кришберг Р. Р. Экспериментальное исследование распределения давления по длине канала в плоских индукционных МГД-насосах. — Магнитная гидродинамика, 1985, № 1, с. 141—143.
8. Лиелпетер Я. Я. Жидкометаллические индукционные МГД-машины. Рига: Зинатне, 1969. 246 с.
9. Вилнитис А. Я., Дриц М. С. Концевой эффект в линейных асинхронных двигателях. Задачи и методы решения. Рига: Зинатне, 1981. 257 с.

Поступила 2 августа 1985 г.