

УДК 621.313.522

С. Е. Дворчик, М. В. Зусман

ВЛИЯНИЕ ЭФФЕКТА ХОЛЛА НА УСЛОВИЯ ГЕНЕРИРОВАНИЯ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА В МГД-ГЕНЕРАТОРАХ

Вопрос о возможности возникновения автоколебаний и получения переменного тока в схемах с МГД-генератором (МГДГ) рассматривался в ряде работ [1—6]. Их основные результаты связаны с синтезом электрических цепей самовозбуждения МГДГ и отысканием нелинейных зависимостей, являющихся, как известно, необходимыми для ограничения амплитуды колебаний. В [1, 3, 5] изучались автоколебательные схемы с одним МГД-генератором, включенным в $L-C$ контур [1, 3] либо в $L-L$ контур [5]. Другой подход к использованию МГДГ с целью получения переменного тока основан на создании многофазных устройств, содержащих несколько МГДГ и индуктивных элементов [2, 4, 6]. В работах [1, 2] проводился чисто линейный анализ генератора, что позволило говорить о принципиальной возможности колебаний в системе, но не дало возможности определить устойчивость колебаний, их амплитуду и характер установления. В случае нелинейных характеристик параметров, входящих в автоколебательную систему, эти вопросы изучались, в частности, методом эквивалентной линеаризации Крылова—Боголюбова [7] в [3, 4].

Простая оценка показывает, что использование $L-C$ и $L-L$ контуров на современном этапе дает возможность конструировать на основе МГДГ источники переменного тока только инфранизкой частоты (~ 1 Гц) [3, 5], а в многофазных устройствах реально достижимы частоты порядка 15—20 Гц [4]. Поэтому в целях получения промышленных значений частот актуальной является проблема улучшения характеристик синтезируемых источников переменного тока за счет внутренних возможностей МГДГ. В настоящей работе рассматривается вопрос о влиянии эффекта Холла на условия возникновения, характер и частоту автоколебаний в $L-C$ контурах, многофазных устройствах и системах с МГД-генератором в качестве четырехполюсного усилительного элемента, т. е. при разделении холловской и фарадеевской цепей.

Задача об установлении колебаний решается для элементарного канала при следующих основных допущениях: 1) скорость несжимаемой рабочей среды в канале постоянна и не зависит от режима работы генератора; 2) влиянием вихревых и концевых токов в канале и электропроводных стенках пренебрегается; 3) реакция протекающих в жидкости токов скомпенсирована; 4) в принятой правосторонней системе координат векторы плотности тока \mathbf{j} , индукции магнитного поля \mathbf{B} , напряженности электрического поля \mathbf{E} и скорости потока \mathbf{v} имеют следующие составляющие:

$$\mathbf{j} = (j_x, j_y, 0), \quad \mathbf{B} = (0, 0, B), \quad \mathbf{E} = (E_x, E_y, 0), \quad \mathbf{v} = (v, 0, 0).$$

Закон Ома для движущейся среды с учетом эффекта Холла запишем в виде [8]

$$j_x = \frac{\sigma}{1 + \beta^2} (E_x - \beta (E_y - vB)), \quad j_y = \frac{\sigma}{1 + \beta^2} (\beta E_x + E_y - vB), \quad (1)$$

где $\beta = \eta B$ — параметр Холла, η — подвижность электронов, σ — электропроводность среды.

1. Выясним влияние эффекта Холла в автоколебательном $L-C$ контуре (рис. 1) с диагонально секционированным каналом длины l , ширины h , высоты Δ . Для такой схемы можем записать

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int_0^t id\tau = U, \quad (2)$$

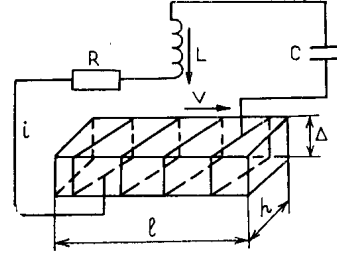


Рис. 1. $L-C$ автогенератор с диагонально секционированным каналом.

где U — генерируемое напряжение, которое в случае канала типа Монтарди, используя (1), закон полного тока $i = \Delta h(j_x + aj_y)$ и соотношения $E_y = aE_x$, $U = -E_x l$, можно представить в виде

$$U = \frac{1}{1+a^2} \left(vBl(\beta-a) - \frac{l(1+\beta^2)}{\sigma\Delta h} i \right). \quad (3)$$

Здесь a — котангенс угла наклона рамок к оси канала.

Индукция магнитного поля B определяется током i , и в случае безжелезной магнитной системы имеет место линейная зависимость $B = -iL/wlh$, где w — число витков обмотки возбуждения. Теперь, учитывая (3), можно переписать (2) следующим образом:

$$L \frac{di}{dt} + R(i)i + \frac{1}{C} \int_0^t id\tau = 0,$$

$$R(i) = R + \frac{R_x}{1+a^2} - \frac{\chi lav}{1+a^2} - \frac{\chi^2 l \eta v}{1+a^2} i + \frac{R_x \eta^2 \chi^2}{1+a^2} i^2,$$

$$R_x = \frac{l}{\sigma\Delta h}, \quad \chi = \frac{L}{wlh}.$$

Воспользуемся по отношению к $R(i)$ методом эквивалентной линеаризации Крылова—Боголюбова [7], считая для простоты L и C постоянными. Полагая $i = I \cos \omega t = I \cos \varphi$, найдем: эквивалентное $R(i)$ сопротивление, зависящее от амплитуды $R_0(I)$; линейное относительно i дифференциальное уравнение; первые приближения уравнений для частоты и амплитуды

$$R_0(I) = R + \frac{R_x}{1+a^2} - \frac{\chi lav}{1+a^2} + \frac{3}{4} \frac{R_x \eta^2 \chi^2}{1+a^2} I^2,$$

$$L \frac{di}{dt} + R_0(I)i + \frac{1}{C} \int_0^t id\tau = 0, \quad \frac{dI}{dt} = -I \frac{R_0(I)}{L}, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Отсюда получаем необходимое условие самовозбуждения в рассматриваемой схеме, определяющее ограничения на характеристики канала:

$$R + \frac{R_x}{1+a^2} - \frac{\chi lav}{1+a^2} < 0. \quad (4)$$

Таким образом, в $L-C$ контуре при условии (4) эффект Холла позволяет в отсутствие других нелинейностей получить автоколебания с мягким характером установления и амплитудой

$$I = \sqrt{\frac{4}{3} \frac{\chi lav - R_x - R(1+a^2)}{R_x \eta^2 \chi^2}}.$$

В данной схеме вклад энергии возможен только со стороны высокоскоростного потока плазмы и при скоростях ниже критической колебания в схеме поддержать нельзя.

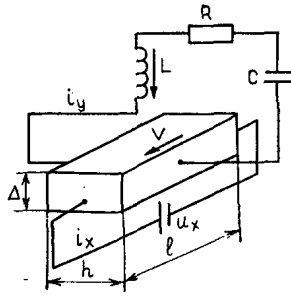


Рис. 2. $L-C$ автогенератор с фарадеевским каналом.

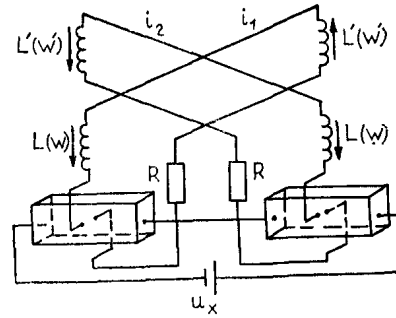


Рис. 3. Двухфазный генератор индуктивного возбуждения.

2. Рассмотрим теперь однофазную электрическую схему (рис. 2) с МГД-генератором — элементом Холла, в котором фарадеевская цепь, представляющая $L-C$ контур самовозбуждения, отделена от холловской, содержащей добавочный источник ЭДС. Введем обозначения:

$$U_y = -hE_y, \quad U_x = -lE_x, \quad R_y = h/\sigma\Delta l, \quad R_x = l/\sigma\Delta h,$$

$$i_x = j_x h \Delta, \quad i_y = j_y l \Delta, \quad k = \eta/\sigma\Delta.$$

Уравнения (1) можно переписать в виде

$$U_x = -R_x i_x - k B i_y, \quad U_y = -R_y i_y + k B i_x - v B h. \quad (5)$$

Составим уравнение $L-C$ контура фарадеевской цепи, выражая i_x из первого равенства в (5):

$$L \frac{di_y}{dt} + R(i_y) i_y + \frac{1}{C} \int_0^t i_y d\tau = 0, \quad (6)$$

$$R(i_y) = R + R_y - \frac{k\chi U_x}{R_x} - v\chi h + \frac{k^2\chi^2}{R_x} i_y^2.$$

Задавая форму тока $i_y = I_y \cos \varphi$ и применяя метод эквивалентной линеаризации к (6), получим уравнения установления колебаний в однофазном генераторе с элементом Холла:

$$\frac{dI_y}{dt} = \frac{I_y}{L} \left(v\chi h + \frac{k\chi U_x}{R_x} - R - R_y - \frac{3}{4} \frac{k^2\chi^2}{R_x} I_y^2 \right), \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (7)$$

Автоколебания с амплитудой

$$I_y = \sqrt{\frac{4}{3} \frac{v\chi h R_x + k\chi U_x - (R + R_y) R_x}{k^2\chi^2}}$$

согласно (7), устанавливаются мягко при выполнении условия, аналогичного (4):

$$v\chi h + \frac{k\chi U_x}{R_x} - R - R_y > 0. \quad (8)$$

Из (8) видно, что выделение холловской цепи позволяет облегчить условия появления переменного тока в $L-C$ контуре, для чего необходимо приложить напряжение $U_x > 0$ против холловского напряжения. Таким образом, появилась возможность вклада энергии помимо высокоскоростного потока плазмы и автоколебания принципиально возможны даже при неподвижной рабочей среде ($v=0$). Однако так же, как и в случае схемы Монтарди, на частоту возникающих колебаний (в рамках первого приближения) эффект Холла влияния не оказывает. Так как аналогичные выводы можно сделать по результатам анализа $L-L$ контура в работе [5], то, по-видимому, добиться увеличения частоты за счет эффекта Холла в однофазных схемах невозможно.

3. Качественно новое проявление эффекта Холла при разделении фарадеевской и холловской цепей имеет место в многофазных генераторах индуктивного возбуждения. Ниже, не останавливаясь на принципах синтеза таких схем, рассмотрим двухфазное устройство, для простоты предполагаемое симметричным (рис. 3). В холловскую цепь усилительные элементы включены последовательно с одним источником дополнительной ЭДС, что позволяет усилить взаимосвязь токов, протекающих в отдельных контурах. Единственным нарушением симметрии рассматриваемой схемы является взаимная противоположность магнитных потоков, создаваемых индуктивностями L' , что необходимо для существования принципиальной возможности получения колебаний. Поэтому с учетом линейной зависимости магнитной индукции от токов можем записать основные уравнения двухфазного автогенератора с последовательным питанием холловской цепи:

$$\begin{aligned} U_1 &= (L+L')\frac{di_1}{dt} + Ri_1, & U_2 &= (L+L')\frac{di_2}{dt} + Ri_2, \\ U_1 &= -vB_1h + kB_1i_x - R_yi_1, & U_2 &= -vB_2h + kB_2i_x - R_yi_2, \\ U_x &= -R_xi_x - 1/2kB_1i_1 - 1/2kB_2i_2, \\ B_1 &= -\chi i_1 + \chi' i_2, & B_2 &= -\chi i_2 - \chi' i_1, \\ \chi &= L/\omega lh, & \chi' &= L'/\omega' lh. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь индексы «1» и «2» отмечают переменные в первой и второй фарадеевских цепях. В результате элементарных преобразований вместо (9) получим систему дифференциальных уравнений, описывающую двухфазный автоколебательный контур:

$$\begin{aligned} di_1/dt &= (a - \varepsilon(i_1^2 + i_2^2))i_1 - (b - \delta(i_1^2 + i_2^2))i_2, \\ di_2/dt &= (b - \delta(i_1^2 + i_2^2))i_1 + (a - \varepsilon(i_1^2 + i_2^2))i_2, \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{1}{L+L'} \frac{k^2\chi^2}{2R_x}, & \delta &= \frac{1}{L+L'} \frac{k^2\chi\chi'}{2R_x}, \\ a &= \frac{1}{L+L'} \left(v h \chi - R - R_y + \frac{k U_x \chi}{R_x} \right), & b &= \frac{1}{L+L'} \left(v h \chi' + \frac{k U_x \chi'}{R_x} \right). \end{aligned}$$

Далее с целью анализа условий и процесса установления колебаний вместо эквивалентно линеаризованных будем рассматривать исходные нелинейные уравнения (10) и воспользуемся тем замечательным фактом, что при условии (8) у системы (10) существует предельный цикл в виде окружности, являющийся одновременно ее решением, для которого могут быть получены точные выражения:

$$i_1(t) = \sqrt{\frac{a}{\varepsilon}} \cos\left(b - \frac{a\delta}{\varepsilon}\right)t, \quad i_2(t) = \sqrt{\frac{a}{\varepsilon}} \sin\left(b - \frac{a\delta}{\varepsilon}\right)t. \quad (11)$$

Неравенство (8) является необходимым и достаточным условием возбуждения автоколебаний и устойчивости предельного цикла (11). Действительно, рассмотрим положительно определенную квадратичную форму в пространстве токов $Q(i_1, i_2) = i_1^2 + i_2^2$ и найдем ее полную производную на траекториях системы (10)

$$\frac{dQ}{dt} = 2i_1 \frac{di_1}{dt} + 2i_2 \frac{di_2}{dt} = 2Q(a - \varepsilon Q). \quad (12)$$

Отсюда следует, что при условии (8) значения функции Q растут в случае, когда $a - \varepsilon Q > 0$, и убывают, если $a - \varepsilon Q < 0$. Значение $Q_0 = a/\varepsilon$

является стационарным для уравнения (12), а поверхность уровня $Q(i_1, i_2) = Q_0$ в пространстве токов устойчива относительно возмущений любой интенсивности. Кроме этого можно указать решение уравнения (12)

$$Q = c \left(1 - \frac{\varepsilon}{a} Q \right) e^{2at}, \quad c = \text{const},$$

точно описывающее мягкий процесс установления колебаний. Если по аналогии с методом эквивалентной линеаризации задать форму токов в виде гармонических функций с частотой, зависящей от амплитуды, то уравнение первого приближения для квадрата амплитуды токов будет в точности совпадать с (12). Из всего сказанного следует, что при условии (8) в двухфазной схеме (см. рис. 3) устанавливаются чисто гармонические колебания, имеющие, согласно (11), амплитуду $\sqrt{a/\varepsilon}$ и частоту

$$\omega = b - \frac{a\delta}{\varepsilon} = \frac{\omega'}{\omega} \frac{R + R_y}{L + L'}. \quad (13)$$

Как и в рассмотренных ранее автоколебательных схемах, выражение для частоты (13) не зависит от холловского напряжения U_x , которое непосредственно влияет лишь на возможность возникновения автоколебаний и их амплитуду. Однако имеется принципиальное отличие двухфазного устройства индуктивного возбуждения от $L-C$ и $L-L$ однофазных генераторов. Увеличение частоты последних никак не связано с возможностями самого преобразователя энергии и определяется величинами L и C . В двухфазном генераторе повышение частоты может быть обеспечено увеличением R . Рост сопротивления нагрузки ухудшает условия возникновения автоколебаний и снижает их амплитуду. В этой ситуации эффект Холла позволяет за счет увеличения U_x компенсировать указанные отрицательные явления и, следовательно, косвенным образом влияет на частоту генерируемого переменного тока.

Для большей наглядности введем некоторые упрощения. Если сравнить в (13) величины b и $a\delta/\varepsilon$, то можно заметить, что в реальных условиях $a\delta/\varepsilon \ll b$, и в этом случае b может давать оценку максимальной частоты, т. е. удастся пренебречь реальной зависимостью частоты от амплитуды. Тогда

$$\omega_0 = \frac{\omega'/\omega}{1 + (\omega'/\omega)^2} \frac{\sigma\mu(v-v^*)^2}{\alpha + 1}, \quad (14)$$

где $\alpha = R/R_y$ — коэффициент нагрузки; $v^* = -kU_x/R_x h$ — скорость дрейфа электронов; μ — магнитная проницаемость рабочего тела.

В (14) использовано соотношение для критического числа витков обмотки возбуждения ω , соответствующего началу развития колебаний $\omega = (\alpha + 1)/\sigma\mu l(v - v^*)$. Равенство (14) показывает, что, подав напряжение U_x против поля Холла, получим скорость дрейфа v^* , которая добавляется к скорости нейтрального газа, что позволяет получить соответственно большую частоту ω .

Отношение реактивной мощности P_r к генерируемой в канале P_3 для двухфазного генератора может быть записано в виде

$$\frac{P_r}{P_3} = \frac{\omega'/\omega}{1 + (\omega'/\omega)^2} \frac{1 + \alpha + \beta^2}{\alpha}. \quad (15)$$

При выводе (15) использовано (14) и выражения

$$P_r = \frac{\omega B^2}{\mu}, \quad P_3 = \frac{\sigma(v - v^*)^2 B^2 \alpha}{(1 + \alpha + \beta^2)^2},$$

записанные для единичного объема. Как видно, при больших β величина P_r/P_3 может значительно превышать $1/2$, в отличие от генераторов без эффекта Холла, где $P_r/P_3 \leq 1/2$.

4. Представляет интерес ответ на вопрос о том, к чему приведет введение емкости C в каждой фазе устройства, представленного на рис. 3. В этом случае следует рассмотреть колебания в системе связанных нелинейных осцилляторов, описываемых уравнениями

$$\frac{di_1}{dt} = (a - \varepsilon(i_1^2 + i_2^2))i_1 - (b - \delta(i_1^2 + i_2^2))i_2 - \frac{1}{C(L+L')} \int_0^t i_1 d\tau, \quad (16)$$

$$\frac{di_2}{dt} = (b - \delta(i_1^2 + i_2^2))i_1 + (a - \varepsilon(i_1^2 + i_2^2))i_2 - \frac{1}{C(L+L')} \int_0^t i_2 d\tau.$$

Как и для системы (10), здесь используем квадратичную форму $Q(i_1, i_2)$ и аналогичную ей положительно определенную форму $Q_1(i_1, i_2) = (\int i_1)^2 + (\int i_2)^2$; можно показать, что существуют два устойчивых предельных цикла (16), являющихся траекториями точных гармонических решений

$$i_1(t) = \sqrt{\frac{a}{\varepsilon}} \cos \left(\frac{b}{2} - \frac{a\delta}{2\varepsilon} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2} - \frac{a\delta}{2\varepsilon} \right)^2 + \frac{1}{C(L+L')}} t \right), \quad (17)$$

$$i_2(t) = \sqrt{\frac{a}{\varepsilon}} \sin \left(\frac{b}{2} - \frac{a\delta}{2\varepsilon} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2} - \frac{a\delta}{2\varepsilon} \right)^2 + \frac{1}{C(L+L')}} t \right).$$

Введение емкости не меняет ни амплитуду, ни фазовые соотношения, но приводит к возможности реализации одной из двух различных частот, одна из которых (знак плюс в (17)) больше частоты гармоник в (11), а другая (знак минус в (17)) определяется фактически лишь значением емкости. Выбор той или иной частоты в результате самовозбуждения генератора равновероятен и зависит только от начального малого возмущения. С технической точки зрения емкость целесообразно вводить, когда в силу низкой электропроводности и скорости плазмы достижимы близкие к промышленным, но все же не достаточные частоты. В этом случае добавка небольшой емкости и небольшой синхронизирующей обмотки возбуждения, управляющей выбором большей частоты, может обеспечить решение задачи.

Отметим далее, что основные изложенные выше результаты относятся к трехфазным генераторам [6] и вообще многофазным генераторам подобного типа.

5. Специального рассмотрения требует вопрос о сделанном допущении, связанном с пренебрежением вихревыми токами и их влиянием на автоколебательные соотношения. Здесь мы предполагаем, что генератор содержит секционированные электроды, подключенные к отдельным нагрузкам либо отдельным обмоткам трансформатора, т. е. электроды потенциально разделены. При этом при наличии трансформатора два канала с противоположным направлением движения плазмы подключены к обмоткам трансформатора и вихревые токи замыкаются только в плазме. Тогда индуцированным вихревым полем удастся пренебречь, если $\bar{R}_m = \mu\sigma\omega h^2/12 \ll 1$, и задачи о вихревых и кондукционных токах могут быть решены раздельно. Очень важен при этом результат, что краевые задачи для вихревых токов не зависят от наличия эффекта Холла. Использование закона Ома в форме (1), уравнения неразрывности для тока $\text{div } \mathbf{j} = 0$ и уравнения Максвелла $\text{rot } \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B}/\partial t$ приводит к краевой задаче, где β отсутствует, т. е. можно воспользоваться результатами, полученными для вихревых токов в отсутствие эффекта Холла.

При $\bar{R}_m \ll 1$ влиянием вихревых токов на частоту и критические условия колебаний в схемах можно пренебречь; вихревые потери в единице объема канала $P_b = \sigma\omega^2 B^2 h^2/12 \ll P_a$.

6. В качестве иллюстрации влияния эффекта Холла ниже представлены некоторые оценочные результаты для двухфазной автоколебательной схемы. Приняты следующие параметры МГД-генератора и электропроводной среды: $l=0,8$ м, $\Delta=0,1$ м, $h=0,4$ м, $v=3200$ м/с, $R=0,35$ Ом, $\chi=\chi'=0,00025$ Т/А, $L=L'=0,0016$ Гн, $\sigma=50$ См/м, $\eta=2$ 1/Т.

Для указанных значений параметров условия самовозбуждения (8) не выполняются при $U_x < 520$ В. Если $U_x > 520$ В, то в схеме будут возникать устойчивые автоколебания. Например, при $U_x=600$ В амплитуда переменного тока составит 1265 А, амплитуда напряжения $U=1020$ В, а частота $\omega=22$ Гц.

Увеличение сопротивления нагрузки R до 0,9 Ом позволит получить переменный ток промышленной частоты 50 Гц. Однако для компенсации потерь необходимо значительно увеличить U_x , что несколько ухудшает энергетические показатели генератора. Ток с амплитудой $I=1265$ А будет получен, если $U_x=2800$ В, при этом амплитуда напряжения составит 2406 В.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Смай П. Р. Магнитогидродинамический генератор переменного тока. — Вопросы ракетной техники, 1962, № 6, с. 3—12.
2. Woodson H. H. AC power generation with transverse-current magnetohydrodynamic conduction machines. — IEEE Trans. on Power Apparatus and Syst., 1965, vol. 84, N 11, p. 1066—1071.
3. Дворчик С. Е. Автоколебания в кондукционном однофазном МГД-генераторе. — Магнитная гидродинамика, 1969, № 3, с. 81—84.
4. Дворчик С. Е. Многофазные МГД-генераторы индуктивного возбуждения. — Магнитная гидродинамика, 1969, № 3, с. 85—89.
5. Губарев А. В., Лаптев С. А. О генерации переменного тока низкой частоты в кондукционных МГД-генераторах. — Магнитная гидродинамика, 1983, № 1, с. 103—108.
6. Дворчик С. Е. К использованию кондукционных МГД-генераторов в цикле преобразования энергии с жидкометаллическим рабочим телом. — В кн.: Технологические проблемы прямого преобразования энергии. Киев: Наукова думка, 1969, с. 120—128.
7. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 503 с.
8. Янговский Е. И., Толмач И. М. Магнитогидродинамические генераторы. М.: Наука, 1972. 424 с.

Поступила 3 апреля 1985 г.