

УДК 532.135:538.4

З. П. Шульман, Э. А. Зальцгендлер, Б. М. Хусид

ВРАЩЕНИЕ МАГНИТОРЕОЛОГИЧЕСКОЙ СУСПЕНЗИИ В ПОСТОЯННОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

I. УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ И ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ НА СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

В настоящее время получены многочисленные экспериментальные и теоретические результаты по влиянию магнитных полей на гидродинамические характеристики потоков неколлоидных магнитореологических суспензий (МРС) с перестраиваемой внешним полем структурой [1—3]. Наложение вращающегося магнитного поля на такие системы изучено лишь экспериментально [4]. В то же время в многочисленных работах, посвященных влиянию вращающегося магнитного поля на гидродинамику коллоидных магнитных жидкостей (МЖ) [5—14] обнаружен ряд интересных эффектов, обусловленных вращением частиц. В частности, показана возможность возбуждения гидродинамического течения однородным вращающимся магнитным полем. Основной физической механизм влияния магнитного поля на движение среды — появление внутреннего момента сил, вызванного непараллельностью векторов намагниченности и напряженности поля.

Для МЖ задачи решались в одномерной постановке: в неограниченных размерах цилиндрическом сосуде; в зазоре между двумя соосными цилиндрами. Роль границы раздела МЖ—воздух не исследовалась. Не анализировалась также тормозящая роль дна сосуда.

Специфика МРС приводит к дополнительным сложностям при анализе ее поведения в магнитных полях. Это связано с влиянием поля на микроструктуру среды и обратным влиянием микроструктуры на характеристики поля внутри МРС.

В настоящей работе проводится учет всех этих факторов на динамику поведения МРС во вращающихся магнитных полях.

Рассматривается поведение МРС, состоящей из магнитомягких частиц, которая помещена в цилиндрический сосуд из немагнитного материала. МРС вращается как целое с угловой скоростью Ω . Вся система помещена во внешнее магнитное поле, вектор напряженности которого \mathbf{H} направлен перпендикулярно оси вращения жидкости (рис.). В магнитном поле частицы образуют агрегаты (в первом приближении эллипсоидальной формы), геометрические параметры которых зависят как от характеристик магнитного и гидродинамического полей, так и от рода дисперсионной среды и дисперсионной фазы.

В достаточно сильных магнитных полях агрегаты ориентируются под фиксированным углом к полю. Величина этого угла α определяется из равенства противоположно направленных гидродинамических и магнитных вращающих моментов. Величина гидродинамического вращающегося момента находится из условия, что в первом приближении имеет место вращение агрегатов с угловой скоростью Ω относительно дисперсионной среды (в первом приближении жидкость в цилиндре

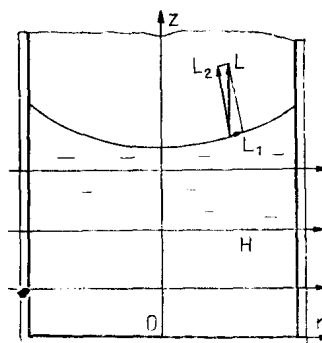


Схема течения.

вращается квазитвердым образом). Тогда [15] гидродинамический вращающий момент

$$M_{\text{гидр}} = 16\pi (a^2 + b^2) \Omega \eta_0 / [3(a^2 \alpha_0 + b^2 \beta_0)]. \quad (1)$$

Здесь a , b — длинная и короткая оси эллипсоида; α_0 , β_0 — эллиптические интегралы, которые в случае осесимметрического эллипсоида имеют аналитическое представление:

$$\alpha_0 = - (A + r_e/2) / [b^3 (r_e^2 - 1)], \quad \beta_0 = (A/2 + r_e) / [b^3 (r_e^2 - 1)],$$

$$A = \ln \{ [r_e - (r_e^2 - 1)^{1/2}] / [r_e + (r_e^2 - 1)^{1/2}] \} / (r_e^2 - 1)^{1/2}.$$

Магнитный вращающий момент L , действующий на эллипсоидальный агрегат [15], равен

$$L = \frac{4}{3} \pi \mu_0 \kappa_a a b^2 G_y G_z [(1 + \kappa_a n_z)^{-1} - (1 + \kappa_a n_y)^{-1}]. \quad (2)$$

Здесь κ_a — восприимчивость агрегата; G_y , G_z — компоненты напряженности эффективного поля в суспензии для системы координат, связанной с эллипсоидом (ось y направлена вдоль короткой оси эллипсоида, ось z — вдоль длинной); n_z , n_y — размагничивающие факторы:

$$n_z = (1 - e^2) \{ \ln [(1 + e)/(1 - e)] - 2e \}, \quad n_y = (1 - n_z)/2;$$

$$e = \sqrt{1 - r_e^{-2}}; \quad r_e = a/b.$$

При нахождении внутреннего эффективного поля в МРС макроскопические характеристики определялись усреднением микроскопических характеристик по расположениям и ориентациям частиц. Взаимодействие агрегатов учитывалось в диполь-дипольном приближении методом Лоренца—Лоренца (самосогласованного поля) [16, 17]. При этом принималась во внимание упорядоченность структуры МРС: монодисперсные агрегаты ориентированы под одинаковым углом α . В результате компоненты вектора эффективного поля имеют вид

$$G_z = 2H \cos \alpha / (A_4 + A_1), \quad G_y = -2H \sin \alpha / (A_2 + A_3). \quad (3)$$

Здесь

$$A_1 = 1 + 2\varphi_a \kappa_a / [3(1 + \kappa_a n_z)], \quad A_2 = 1 + 2\varphi_a \kappa_a / [3(1 + \kappa_a n_y)],$$

$$A_3 = 1 - \varphi_a \kappa_a / [3(1 + \kappa_a n_y)], \quad A_4 = 1 - \varphi_a \kappa_a / [3(1 + \kappa_a n_z)],$$

α — угол между длинной осью агрегата и направлением магнитного поля, φ_a — концентрация агрегатов, которая связана с концентрацией дисперсной фазы соотношением $\varphi_a = \varphi/\Phi$ (Φ — степень заполнения агрегата, равная для типичных ситуаций 0,5 [2, 3]).

Из выражений (1)—(3) следует первое уравнение связи между искомыми параметрами структуры (степенью анизодиаметрии r_e и углом ориентации α):

$$4(r_e^2 + 1) / \{ [2r_e^2(1 - A') + A'] G'_z G'_y [(1 + \kappa_a n_z)^{-1} - (1 + \kappa_a n_y)^{-1}] \} - S_1 = 0. \quad (4)$$

Здесь $S_1 = \mu_0 \kappa_a H^2 / (\eta_0 \Omega)$, $G'_z = |G_z|/H$, $G'_y = |G_y|/H$, $A' = r_e (r_e + A/2) / (r_e^2 - 1)$.

В отсутствие возмущения гидродинамического поля (при вращении жидкости как целого) тензор избыточных (магнитных) напряжений σ^M в жидкости имеет вид [18]

$$\sigma^M = -1/2 N \lambda [\langle \mathbf{p} \otimes L \mathbf{p} \rangle + \langle L \mathbf{p} \otimes \mathbf{p} \rangle] - 1/2 N L,$$

где $\lambda = (a^2 - b^2)/(a^2 + b^2)$, N — количество агрегатов в единице объема ($N = \varphi_a / (4/3\pi ab^2)$), $\langle \dots \rangle$ — усреднение по направлениям, \mathbf{p} — единичный вектор ориентации агрегата.

В цилиндрической системе координат r, φ, z (рис.) ненулевые компоненты тензора напряжений равны

$$\sigma_{\varphi r}^M = L'(\lambda \cos 2\varphi \cos 2\alpha - 1), \quad \sigma_{r\varphi}^M = L'(\lambda \cos 2\varphi \cos 2\alpha + 1), \quad (5)$$

где $L' = -LN/2 > 0$.

При вращении жидкости вследствие центробежных сил происходит искривление поверхности раздела жидкость—воздух, которая принимает форму параболоида вращения. Агрегаты же занимают положение, при котором их проекция на направление магнитного поля максимальна, т. е. они лежат в плоскости, перпендикулярной оси симметрии цилиндра. Тогда со стороны магнитного поля на единицу объема жидкости действует вращающий момент \mathbf{L} , равный разности $\sigma_{\varphi r}^M - \sigma_{r\varphi}^M$, направленный вдоль оси z (рис.). Для поверхностного слоя он раскладывается на две составляющие: \mathbf{L}_1 — момент, лежащий в плоскости, касательной поверхности раздела, \mathbf{L}_2 — момент, перпендикулярный поверхности раздела. Так как поверхность раздела свободна от напряжений, то магнитные напряжения, обусловленные внешним полем, приводят к появлению гидродинамических напряжений. Это вызывает отличное от квазитвердого вращения движение суспензии. Движение жидкости, обусловленное перпендикулярной составляющей вектора момента (\mathbf{L}_2), взаимно компенсируется. Микроскопическое вращение жидкости, которое вызвано наличием параллельной составляющей вектора момента (составляющей \mathbf{L}_1), приводит в поверхностном слое (и, следовательно, во всем объеме жидкости) к сдвиговому макроскопическому движению жидкости, направленному в сторону вращения цилиндра.

Для такой гидродинамической ситуации (наличие макроскопического сдвигового течения) тензор избыточных напряжений в суспензии имеет вид [18]

$$\begin{aligned} \sigma_{\sim} = & 2\eta_0 D_{\sim} + \eta_0 \varphi_a \{ -\rho \langle \mathbf{p} D \mathbf{p} \rangle_{\sim} E + 2\alpha' D_{\sim} + 2\beta D_{\sim} (3\langle \mathbf{p} \otimes \mathbf{p} \rangle_{\sim} - \\ & - E) + \xi [\langle \mathbf{p} \otimes D \mathbf{p} \rangle_{\sim} + \langle D \mathbf{p} \otimes \mathbf{p} \rangle_{\sim}] + \chi \langle \mathbf{p} \otimes \mathbf{p} (D \mathbf{p}) \rangle_{\sim} \} - \\ & - N\lambda/2 [\langle \mathbf{p} \otimes L \mathbf{p} \rangle_{\sim} + \langle L \mathbf{p} \otimes \mathbf{p} \rangle_{\sim}] - N \langle L \rangle_{\sim} / 2. \end{aligned}$$

Здесь D — тензор скоростей деформации, E — единичный тензор, D — коэффициент вращательной диффузии; $\rho, \alpha', \beta, \xi, \chi$ — постоянные, которые определяются формой эллипсоида (явный вид для них выписан в [18]).

Интенсивность сдвигового движения жидкости, являющегося вторичным течением, невысока. На фоне квазитвердого вращения с достаточно высокой угловой скоростью имеются слабые отклонения азимутальной скорости от $v_\varphi = -\Omega r$. Поэтому можно осреднить значения напряжений за период вращения, т. е. по углу φ . Тогда в цилиндрической системе координат эти средние компоненты тензора напряжений равны

$$\sigma_{rr} = 2\eta_0 D_{rr} + \eta_0 \varphi_a [-\rho (D_{rr} + D_{\varphi\varphi}) / 2 + \xi D_{rr} + 2\alpha' D_{rr} + \chi (3D_{rr} + D_{\varphi\varphi}) / 8],$$

$$\sigma_{r\varphi} = \sigma'_{r\varphi} + \bar{\sigma}_{r\varphi}^M,$$

$$\sigma_{zz} = 2\eta_0 D_{zz} + \eta_0 \varphi_a [-\rho (D_{rr} + D_{\varphi\varphi}) / 2 + 2\alpha' D_{zz}], \quad (6)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = 2\eta_0 D_{\varphi\varphi} + \eta_0 \varphi_a [-\rho (D_{rr} + D_{\varphi\varphi}) / 2 + \xi D_{\varphi\varphi} + 2\alpha' D_{\varphi\varphi} + \chi (D_{rr} + D_{\varphi\varphi}) / 8];$$

$$\sigma_{\varphi r} = \sigma'_{\varphi r} + \bar{\sigma}_{\varphi r}^M, \quad \sigma_{\varphi z} = \sigma'_{\varphi z}.$$

Здесь сдвиговые напряжения равны

$$\sigma'_{\varphi r} = \sigma'_{r\varphi} = 2\eta_1 D_{r\varphi}, \quad \sigma_{\varphi z} = \sigma_{z\varphi} = 2\eta_2 D_{\varphi z}, \quad \sigma'_{rz} = \sigma'_{zr} = 2\eta_2 D_{rz}, \quad (7)$$

а магнитные напряжения $\bar{\sigma}_{\varphi r}^M$ и $\bar{\sigma}_{r\varphi}^M$ определяются по формулам (5)

$$\bar{\sigma}_{\varphi r}^M = -L', \quad \bar{\sigma}_{r\varphi}^M = L'. \quad (8)$$

Эффективные вязкости, входящие в выражение (7), равны

$$\eta_1 = \eta_0 [1 + \varphi_a (\alpha' + \xi/2 + \chi/8)], \quad \eta_2 = \eta_0 [1 + \varphi_a (\alpha' + \xi/4)], \quad (9)$$

где

$$\alpha' = (ab^4 \alpha'_0)^{-1}, \quad \xi = 4 / [(a^2 + b^2) ab^2 \beta'_0] - 2 / (ab^4 \alpha'_0),$$

$$\chi = 2\alpha''_0 / (ab^4 \alpha'_0 \beta''_0) - 8 / [ab^2 (a^2 + b^2) \beta'_0] + 2 / (ab^4 \alpha'_0);$$

$\alpha'_0, \beta'_0, \alpha''_0, \beta''_0$ — эллиптические интегралы, которые в случае осесимметрического эллипсоида имеют аналитические представления:

$$\alpha'_0 = r_e^4 [2r_e^2 - 5 - 3A' / (2r_e)] / [4a^3 b^2 (r_e^2 - 1)],$$

$$\beta'_0 = 2r_e^2 (1 + r_e^2/2 + 3r_e A' / 4) / [a^3 b^2 (r_e^2 - 1)^2],$$

$$\alpha''_0 = 2r_e^2 [r_e^2/4 + 1/8 + (4r_e^2 - 1) / (16r_e)],$$

$$\beta''_0 = -2r_e^2 [3/2 + (2r_e^2 + 1) A' / (4r_e)] / [ab^2 (r_e^2 - 1)^2],$$

$$A' = \ln \{ [r_e - (r_e^2 - 1)^{1/2}] / [r_e + (r_e^2 - 1)^{1/2}] \} / (r_e^2 - 1)^{1/2}.$$

В сильных магнитных полях, когда $r_e \gg 1$, справедливы асимптотические представления

$$A' = -(2 \ln r_e + \ln 4) / 4, \quad \alpha'_0 = (2ab^4)^{-1}, \quad \alpha''_0 = (2ab^2)^{-1}, \\ \beta'_0 = (a^3 b^2)^{-1}, \quad \beta''_0 = (2 \ln r_e - 3 + \ln 4) / a^3. \quad (10)$$

Тогда из (9), (10) следуют предельные выражения для коэффициентов

$$\alpha' \rightarrow 2, \quad \xi \rightarrow 0, \quad \chi \rightarrow 2r_e^2 / (2 \ln r_e - 3 + \ln 4) - 4. \quad (11)$$

С увеличением степени анизоднаметричности точность вычислений по формулам (11) возрастает. Так, для $r_e = 10$ согласно соотношениям (10) $\chi = 62$ (точный расчет дает 58), а для $r_e = 100$ соответственно 2629 и 2752. Учитывая, что для типичных МРС концентрация агрегатов может достигать 0,1...0,2 [1], получаем, что в сильных полях $\eta_1 \gg \eta_2$.

Вторичные потоки, возникающие при вращении сосуда, являются слабо интенсивными, поэтому характерные числа Рейнольдса весьма малы ($Re < 1$). Это дает возможность пренебречь инерционными членами в уравнении движения. Из анализа гидродинамики течения вытекает, что в такой постановке отличной от нуля будет лишь компонента скорости v_φ . Уравнение для ее осредненного по углу v'_φ значения $v'_\varphi =$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v_\varphi d\varphi \text{ имеет вид (штрихи опускаются)}$$

$$\frac{\eta_1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^3 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\varphi}{r} \right) \right] + \eta_2 \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (12)$$

Для замыкания задачи необходимо сформулировать краевые условия. Наиболее сложно выставить условие для v_φ на свободной поверхности. На ней должны отсутствовать поверхностные силы. Форма поверхности при вращении жидкости со свободной границей задается

уравнением $z = \Omega^2 r^2 / (2g)$, а единичный вектор нормали к поверхности имеет проекции $n_r = -\Omega^2 r / (gA)$, $n_\varphi = 0$, $n_z = A^{-1}$, где $A = \sqrt{1 + (\Omega^2 r / g)^2}$.

Условие отсутствия сил на свободной поверхности имеет вид (с целью упрощения решения задачи граничные условия на искривленной поверхности сносятся на плоскость $z = 0$, что справедливо для $\Omega^2 R / g \ll 1$)

$$f_r|_{z=0} = (\sigma_{rr}n_r + \sigma_{r\varphi}n_\varphi + \sigma_{rz}n_z)|_{z=0} = 0,$$

$$f_\varphi|_{z=0} = (\sigma_{\varphi r}n_r + \sigma_{\varphi\varphi}n_\varphi + \sigma_{\varphi z}n_z)|_{z=0} = 0,$$

$$f_z|_{z=0} = (\sigma_{zr}n_r + \sigma_{z\varphi}n_\varphi + \sigma_{zz}n_z)|_{z=0} = 0.$$

Ввиду того, что из магнитных напряжений отличны от нуля согласно (5) только компоненты $\bar{\sigma}_{\varphi r}^M$ и $\bar{\sigma}_{r\varphi}^M$, то следует принять во внимание лишь второе из этих соотношений, которое с учетом вида компонент единичного вектора к нормали сводится к

$$\frac{\Omega^2 r}{g} \left[\bar{\sigma}_{\varphi r}^M + \eta_1 r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\varphi}{r} \right) \right] = \eta_2 \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} \text{ при } z=0, \quad (13)$$

где $\bar{\sigma}_{\varphi r}^M$, η_1 , η_2 определяются соответственно из (8) и (9).

В сильных магнитных полях радиальная вязкость η_1 , характерная для течения поперек радиуса, много больше осевой вязкости η_2 . Поэтому в области, примыкающей к свободной поверхности, формируется гидродинамический пограничный слой. Учитывая это и осуществив переход к безразмерным переменным по формулам

$$\bar{v} = -\frac{\Omega r + v_\varphi}{V}, \quad \bar{r} = r/R, \quad \bar{z} = \sqrt{\eta_1/\eta_2} z/R, \quad b = \sqrt{\eta_1 \Omega^2 R / (\eta_2 g)}, \quad (14)$$

где характерная скорость вторичного течения

$$V = -\bar{\sigma}_{\varphi r}^M \Omega^2 R^2 / \sqrt{\eta_1 \eta_2 g} \quad (\bar{\sigma}_{\varphi r}^M < 0), \quad (15)$$

можно свести задачу (12)–(14) к

$$\begin{aligned} \frac{1}{\bar{r}^2} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left[\bar{r}^3 \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\frac{\bar{v}}{\bar{r}} \right) \right] + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{z}^2} = 0, \\ -b\bar{r}^2 \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\frac{\bar{v}}{\bar{r}} \right) + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{r}} = \bar{r} \text{ при } \bar{z} = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Для замыкания задачи (16) необходимо определить зависимость магнитных напряжений $\bar{\sigma}_{\varphi r}^M$, а также вязкостей η_1 и η_2 от напряженности поля, угловой скорости вращения, характеристик дисперсной фазы и дисперсионной среды. Это будет выполнено во второй части работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шульман З. П., Кордонский В. И. Магнитореологический эффект. Минск: Наука и техника, 1982. 184 с.
2. Шульман З. П., Кордонский В. И., Зальцгендлер Э. А., Прохоров И. В., Хусид Б. М., Демчук С. А. Структура, магнитные и реологические характеристики ферросуспензий (эксперимент). — Магнитная гидродинамика, 1984, № 3, с. 3–10.
3. Шульман З. П., Кордонский В. И., Зальцгендлер Э. А., Прохоров И. В., Хусид Б. М., Демчук С. А. Динамические и физические свойства ферросуспензий со структурой, перестраиваемой внешним магнитным полем. — Магнитная гидродинамика, 1984, № 4, с. 30–38.
4. Шульман З. П., Кордонский В. И., Демчук С. А. Влияние неоднородного вращающегося магнитного поля на течение и теплообмен в ферросуспензиях. — Магнитная гидродинамика, 1977, № 4, с. 30–34.

5. *Зайцев В. М., Шлиомис М. И.* Увлечение ферромагнитной суспензии вращающимся полем. — ПМТФ, 1969, № 5, с. 11—16.
6. *Шлиомис М. И.* Магнитные жидкости. — УФН, 1974, т. 112, № 3, с. 427—458.
7. *Каган И. Я., Рыков В. Г., Янговский Е. И.* О течении диэлектрической ферромагнитной суспензии во вращающемся магнитном поле. — Магнитная гидродинамика, 1973, № 2, с. 135—137.
8. *Матыгуллин Б. Я.* Об увлечении цилиндрического сосуда с феррожидкостью вращающимся магнитным полем. — В кн.: Физические свойства и гидродинамика дисперсных ферромагнетиков. Свердловск, 1977, с. 69—70.
9. *Глазов О. А.* О вовлечении в движение ферромагнитной жидкости бегущим магнитным полем. — Магнитная гидродинамика, 1976, № 4, с. 19—23.
10. *Цеберс А. О.* Межфазные напряжения в гидродинамике жидкостей с внутренним вращением. — Магнитная гидродинамика, 1975, № 1, с. 79—82.
11. *Цеберс А. О.* Магнитные напряжения и гидродинамика магнитной жидкости в однородных вращающихся магнитных полях. — Магнитная гидродинамика, 1978, № 4, с. 9—13.
12. *Кирюшин В. В., Налетова В. А., Чеканов В. В.* Движение намагничивающейся жидкости во вращающемся однородном магнитном поле. — ПММ, 1978, т. 42, № 4, с. 668—672.
13. *Вислович А. И.* О воздействии вращающегося поля на ферромагнитную суспензию в слое со свободной границей. — Письма в ЖТФ, 1975, т. 1, вып. 16, с. 744—748.
14. *Берковский Б. М., Исаяев С. В., Кашевский Б. Э.* Об одном эффекте внутренних степеней вращения в гидродинамике микроструктурных жидкостей. — ДАН СССР, 1980, т. 253, № 1, с. 62—65.
15. *Jeffery G. B.* The motion of ellipsoidal particles immersed in a viscous fluid. — Proc. Roy. Soc., 1922, vol. 102, N 715, p. 161—179.
16. *Духин С. С., Шилов В. И.* Диэлектрические явления и двойной слой в дисперсных системах и полиэлектролитах. Киев: Наукова думка, 1972. 206 с.
17. *Ландау Л. Д., Лившиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Физматгиз, 1959. 532 с.
18. *Покровский В. И.* Статическая механика разбавленных суспензий. М.: Наука, 1978. 136 с.

Поступила 27 октября 1986 г.