

УДК 532.135:538.4

З. П. Шулман, Э. А. Зальцгендлер, Б. М. Хусид

ВРАЩЕНИЕ МАГНИТОРЕОЛОГИЧЕСКОЙ СУСПЕНЗИИ В ПОСТОЯННОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

II. НЕОГРАНИЧЕННЫЕ И ПОЛУОГРАНИЧЕННЫЕ ЦИЛИНДРЫ

В работе [1] рассмотрены особенности гидродинамики магнитореологической суспензии (МРС), вращающейся в магнитном поле. Показано, что вследствие искривления на свободной поверхности возникает направленная вдоль поверхности составляющая момента сил. Это приводит к появлению вторичного течения. Для этого течения выведены уравнения движения и сформулировано условие на свободной поверхности. Течение имеет характер пограничного слоя с двумя резко отличающимися вязкостями: радиальной η_1 и осевой η_2 ($\eta_1 \gg \eta_2$). Интенсивность этого движения зависит от значений η_1 и η_2 , а также от магнитных напряжений $\bar{\sigma}_{\varphi r}^M$.

Величины η_1 , η_2 и $\bar{\sigma}_{\varphi r}^M$ определяются микроструктурой МРС. В магнитном поле частицы дисперсной фазы объединяются в агрегаты эллипсоидальной формы, одинаково ориентированные по отношению к полю. Поэтому микроструктура МРС характеризуется двумя величинами: формпараметром r_e (отношение осей эллипсоида) и углом ориентации α [1]. Для их определения нужны два уравнения. Одно из них, связывающее эти величины, получается из равенства магнитных и гидродинамических вращающих моментов (соотношение (4) работы [1]). Для вывода второго уравнения рассмотрим силы, действующие на эллипсоид, вращающийся с угловой скоростью Ω в жидкости.

Напряжения на его поверхности в связанной с ним системе координат (рис. 1) записываются в виде [2]

$$\sigma_y = -p_0 P \frac{y}{b^2} + \frac{8\eta_0 P}{ab^2} G \frac{z}{a^2}, \quad \sigma_z = -p_0 P \frac{z}{a^2} + \frac{8\eta_0 P}{ab^2} G' \frac{y}{b^2}, \quad (1)$$

где $P = (y^2/b^4 + z^2/a^4)^{-1/2}$ — расстояние от начала координат до касательной плоскости в точке (y, z) ; p_0 — гидростатическое давление; G, G' — коэффициенты, равные соответственно

$$G = \frac{a^2 \Omega}{2(a^2 \alpha_0 + b^2 \beta_0)}, \quad G' = - \frac{b^2 \Omega}{2(a^2 \alpha_0 + b^2 \beta_0)},$$

α_0, β_0 — эллиптические интегралы.

Для наиболее интересного случая сильных магнитных полей, когда $r_e = a/b \gg 1$, эллиптические интегралы допускают простое представление, что позволяет выписать выражения для напряжений в виде

$$\sigma_y = -p_0 P \frac{y}{b^2} + \frac{2\eta_0 P z \Omega}{b^2 \ln r_e}, \quad (2)$$

$$\sigma_z = -p_0 P \frac{z}{a^2} - \frac{2\eta_0 P y \Omega}{b^2 \ln r_e}.$$

Анализ системы (2) показывает, что в рассматриваемом случае ($r_e \gg 1$) напряжение $\sigma = \sqrt{\sigma_y^2 + \sigma_z^2}$ достигает экстремального значения в точке $\tilde{z} \approx a; \tilde{y} = 0$.

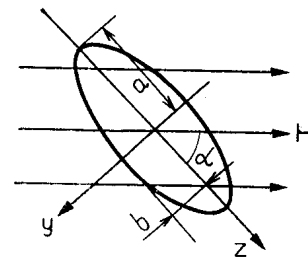


Рис. 1. К постановке задачи.

Уравнения (2) определяют напряжение, действующее на полюсах агрегата и приводящее к срезу «лишних» частиц. Противостоят срезанию частиц магнитные силы, действующие между ними. Как показано в [3], они равны

$$F_{\text{магн}} \approx \frac{B_a^2}{\mu_0 \mu_a} \frac{2\pi R^2}{3\Phi} \frac{R}{\Delta}, \quad (3)$$

где B_a , μ_a — индукция магнитного поля в агрегате и его магнитная проницаемость, Φ — степень заполнения агрегата частицами ($\Phi \approx 0,5$), R — радиус частицы, Δ — минимальная толщина прослойки.

Для достаточно больших r_e размагничивающий фактор вдоль длинной оси равен нулю, поэтому $B_a \approx \mu_0 \mu_a H_e$ и

$$F_{\text{магн}} \approx \mu_0 \mu_a H_e^2 \frac{2\pi R^2}{3\Phi} \frac{R}{\Delta}. \quad (4)$$

В свою очередь из (2) вытекает, что гидродинамическая сила, действующая на одну частицу, равна

$$F_{\text{гидр}} \approx 2\pi R^2 \eta_0 \Omega r_e^2 / \ln r_e. \quad (5)$$

В состоянии равновесия

$$F_{\text{гидр}} \approx k F_{\text{магн}}. \quad (6)$$

Величина k в формуле (5) — эффективный коэффициент, который учитывает некоторое завышение магнитной силы (формула (4) выполняется точно лишь при $\Delta \ll R$), занижение гидродинамической силы (эффективная площадь частицы в соотношении (5) выбрана равной πR^2), а главное, существование достаточно «толстой» прослойки жидкости между частицами, из-за которой коэффициент трения весьма мал.

Подстановка значений магнитной и гидродинамической сил в (6) приводит к соотношению

$$\frac{r_e^2}{\ln r_e} \frac{1}{S_1} = k \frac{\mu_a}{\chi_a} \frac{R}{\Delta} \frac{1}{3\Phi},$$

где введен параметр $S_1 = \mu_0 \chi_a H^2 / (\eta_0 \Omega)$ — отношение магнитных и гидродинамических вращающих моментов.

Видно, что комплекс $r_e^2 / (\ln r_e S_1)$ не зависит от параметров процесса, а определяется лишь видом дисперсной среды (характерным размером частиц, магнитной проницаемостью агрегата и характером упаковки в нем частиц). Так как при $r_e \gg 1$ квазитвердое вращающее движение среды эквивалентно сдвиговому течению, то значение этого комплекса можно взять из анализа экспериментальных данных по куэттовскому течению [3]. Это дает

$$r_e^2 \approx 0,08 \ln r_e S_1. \quad (7)$$

Уравнение (7) является искомой зависимостью формпараметра r_e от критерия S_1 . Вместе с соотношением (4) работы [1] оно определяет микроструктуру МРС и тем самым значения η_1 , η_2 , $\sigma_{\text{гр}}^M$.

Вначале проанализируем простейший случай, когда отсутствует влияние свободной поверхности. Рассмотрим гидродинамику МРС, которая заполняет зазор между концентрическими бесконечными цилиндрическими поверхностями радиусов r_1 , r_2 ($r_2 > r_1$). Угловая скорость вращения одного из них задана, а второго свободна. Магнитное поле направлено перпендикулярно оси цилиндров. Подобные задачи для магнитных жидкостей (МЖ) анализировались во многих работах, из которых отметим [4—7].

Для этого течения уравнение движения имеет вид

$$\frac{d}{dr} \left[r^3 \frac{d}{dr} \left(\frac{v}{r} \right) \right] = 0. \quad (8)$$

Сначала рассмотрим случай задания угловой скорости вращения внешней поверхности

$$v|_{r=r_2} = -\Omega r_2. \quad (9)$$

Учет условия отсутствия касательных напряжений на внутренней поверхности и соотношений (6) работы [1] приводит к выражению

$$\left[\eta_1 r \frac{d}{dr} \left(\frac{v}{r} \right) + \bar{\sigma}_{\varphi r^M} \right] \Big|_{r=r_1} = 0 \quad (\bar{\sigma}_{\varphi r^M} < 0). \quad (10)$$

Решение задачи (8)–(10) дает распределение угловой скорости вращения МРС

$$\omega = -\Omega + \frac{\bar{\sigma}_{\varphi r^M} r_1^2}{2\eta_1 r^2} \left[1 - \left(\frac{r}{r_1} \right)^2 \right].$$

Магнитное поле ускоряет вращение МРС. Увеличение угловой скорости вращения внутреннего цилиндра равно

$$\frac{\Delta\omega}{\Omega} = \frac{\omega}{\Omega} \Big|_{r=r_1} - 1 = -\frac{\bar{\sigma}_{\varphi r^M}}{2\eta_1 \Omega} \left[1 - \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 \right]. \quad (11)$$

Проанализируем асимптотическое поведение величины $\Delta\omega$ в сильных полях. Из соотношений (9)–(11) работы [1] следует, что для этих условий значение вязкости η_1 стремится к

$$\eta_1 \approx \eta_0 \varphi_a r_e^2 / [8(\ln r_e - 0,8)]. \quad (12)$$

Магнитные напряжения определяются из формул (8) и (2) [1]

$$|\bar{\sigma}_{\varphi r^M}| \approx \mu_0 H^2 (\pi/2 - \alpha^1) \varphi_a \chi_a^2 / (\chi_a + 2). \quad (13)$$

В сильных полях угол ориентации, как это следует из уравнения (4) [1], равен

$$\alpha' = \pi/2 - \frac{2r_e^2}{\ln r_e} \frac{1}{S_1} \frac{\chi_a + 2}{\chi_a}. \quad (14)$$

В результате из (11)–(14) определяем искомое выражение для асимптотики превышения угловой скорости вращения внутреннего цилиндра

$$\left(\frac{\Delta\omega}{\Omega} \right)_{\max} = 8 \left[1 - \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 \right] (1 - 0,8/\ln r_e). \quad (15)$$

Величина формфактора r_e в достаточно сильных полях ($H \sim 10^4$ А/м) достигает 40...60 [3]. Для умеренно концентрированных сред ($\varphi \approx 0,1$) это может дать двухкратное увеличение угловой скорости вращения при $r_1/r_2 = 0,83$ (такое отношение радиусов реализовано в эксперименте с МЖ [7]).

Если задана угловая скорость вращения внутреннего цилиндра (Ω), то распределение скоростей в зазоре

$$\omega = -\Omega + \frac{\bar{\sigma}_{\varphi r^M}}{2\eta_1 \Omega} \left(\frac{r_2}{r} \right)^2 \left[1 - \left(\frac{r}{r_1} \right)^2 \right].$$

Жидкость вращается медленнее внутреннего цилиндра. Внешний цилиндр также отстает от внутреннего. В сильных полях этот «дефицит» скорости равен

$$\left(\frac{\Delta\omega}{\Omega}\right)_{\max} = 8 \left[\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 - 1 \right] (1 - 0,8/\ln r_e). \quad (16)$$

Для сравнения кратко опишем результаты для МЖ. Для них также наблюдается превышение скорости вращения внутреннего цилиндра над внешним. Это происходит вследствие ориентирующего влияния магнитного поля на элементы дисперсной фазы. Угловые скорости вращения частиц и жидкости оказываются различными, и включается механизм вращательной вязкости. В МРС этот эффект значительно сильнее вследствие интенсивного структурообразования. Образующиеся агрегаты уже не дезориентируются броуновским движением. Это приводит к значительному росту вращающего магнитного момента.

Проведем количественное сопоставление. Максимальное превышение скорости внутреннего цилиндра, которое имеет место при отсутствии трения в опорах, для МЖ равно [7]:

$$\left(\frac{\Delta\omega}{\Omega}\right)_{\text{МЖ}} = \frac{s[1 - (r_1/r_2)^2]}{1 + s(r_1/r_2)^2},$$

где $s = \eta_r/\eta$ — отношение вращательной вязкости к сдвиговой; вращательная вязкость $\eta_r = \tau_{\perp} M_0 H/4$, где τ_{\perp} — время релаксации составляющей намагниченности, перпендикулярной полю, M_0 — равновесная намагниченность. В общем случае вследствие трудности вычисления τ_{\perp} вращательная вязкость определяется экспериментально [7]. Она растет с усилением степени замороженности магнитного момента, а также с ростом напряженности поля. Ее предельное значение $\eta_r = 3\eta\phi/2$. Оно реализуется для МЖ с замороженной структурой, когда отсутствует вращательная диффузия, вызванная броуновским движением. Броуновским движением можно пренебречь, когда параметр Ланжевена $\xi = mH/kT$ (m — магнитный момент частицы) равен ~ 20 . Для магнетита при комнатных температурах для этого необходимы поля порядка 10^5 А/м. В этих условиях

$$\left(\frac{\Delta\omega}{\Omega}\right)_{\text{МЖ}} = \left(\frac{\Delta\omega}{\Omega}\right)_{\text{МЖ, макс}} = \frac{1,5\phi[1 - (r_1/r_2)^2]}{1 + 1,5\phi(r_1/r_2)^2}. \quad (17)$$

При $\phi = 0,1$ и $r_1/r_2 = 0,83$ это дает 4,2%, что значительно меньше, чем для МРС. В экспериментах, описанных в работе [7], превышение скорости вращения внутреннего цилиндра достигало $\sim 12\%$. С учетом трения в опорах это реализуется при $\eta_r \approx 0,5\eta$.

Интересно отметить, что в сильных полях для МРС в отличие от МЖ эффект не зависит от концентрации дисперсной фазы. Это связано с тем, что для МРС с ростом ϕ увеличиваются как вращающий момент, так и вязкость η_1 . В случае МЖ вращающий момент растет, а сдвиговая вязкость остается постоянной.

Таким образом, сравнительный анализ показывает, что образование неподвижных длинных агрегатов резко усиливает влияние магнитного поля на гидродинамику МРС.

Теперь рассмотрим влияние свободной поверхности. Для МЖ этот эффект не анализировался. Исследуем гидродинамику МРС, которая помещена во вращающийся цилиндрический сосуд. В работе [1] были сформулированы уравнение и граничное условие на свободной поверхности для возникающих вторичных потоков:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^3 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\bar{v}}{r} \right) \right] + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{z}^2} = 0, \quad (18)$$

$$-\beta r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\bar{v}}{r} \right) + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}} = \bar{r} \quad \text{при} \quad \bar{z} = 0, \quad (19)$$

где

$$\beta = \sqrt{\frac{\eta_1}{\eta_2} \frac{\Omega^2 R}{g}}, \quad \bar{v} = -\frac{\Omega r + v_\Phi}{V}, \quad \bar{r} = r/R, \quad (20)$$

$$\bar{z} = \sqrt{\eta_1/\eta_2} z/R, \quad V = -\bar{\sigma}_{\Phi r} \Omega^2 R^2 / (\sqrt{\eta_1 \eta_2} g).$$

Эти соотношения дополняются условиями затухания вторичного течения в глубине жидкости, ограниченности скорости на оси и прилипания на боковой поверхности сосуда:

$$\bar{v} = 0 \text{ при } \bar{z} \rightarrow -\infty, \quad \bar{v} = 0 \text{ при } \bar{r} = 1. \quad (21), (22)$$

Решение уравнения (18), которое удовлетворяет условию (21), имеет вид

$$\bar{v} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp(\sqrt{\lambda_n} \bar{z}) I_1(\sqrt{\lambda_n} \bar{r}), \quad (23)$$

где $I_1(x)$ — функция Бесселя первого рода первого порядка. Из условия (23) следует уравнение для собственных чисел задачи

$$I_1(\sqrt{\lambda_n}) = 0,$$

решение которого табулировано [8].

Для определения неизвестных коэффициентов A_1, A_2, \dots используется условие (19). Разложение левой и правой частей соотношения (19) в ряд Фурье по функциям Бесселя и учет того, что для функций Бесселя производные могут быть выражены через сами функции, приводит (19) к виду

$$-\beta \sum_{n=1}^{\infty} A_n [\bar{r} \sqrt{\lambda_n} I_0(\sqrt{\lambda_n} \bar{r}) - 2I_1(\sqrt{\lambda_n} \bar{r})] + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sqrt{\lambda_n} I_1(\sqrt{\lambda_n} \bar{r}) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{\lambda_n} I_2(\sqrt{\lambda_n})} I_1(\sqrt{\lambda_n} \bar{r}). \quad (24)$$

Раскладывая $f(\bar{r}) = \bar{r} I_0(\sqrt{\lambda_n} \bar{r})$ в ряд Фурье по функциям $I_1(\sqrt{\lambda_n} \bar{r})$, преобразуем соотношение (24) следующим образом:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \beta I_1(\sqrt{\lambda_m} \bar{r}) \left(-\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sqrt{\lambda_n} c_{nm} + 2A_m \right) +$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sqrt{\lambda_m} I_1(\sqrt{\lambda_m} \bar{r}) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{\lambda_m} I_2(\sqrt{\lambda_m})} I_1(\sqrt{\lambda_m} \bar{r}), \quad (25)$$

где

$$c_{mn} = \frac{2}{I_2^2(\sqrt{\lambda_m})} \int_0^1 \bar{r} I_0(\sqrt{\lambda_n} \bar{r}) I_1(\sqrt{\lambda_m} \bar{r}) d\bar{r}. \quad (26)$$

Приравнявая в (26) коэффициент при соответствующих членах разложений, получим для коэффициентов A_n бесконечную систему линейных алгебраических уравнений:

$$A_n (\sqrt{\lambda_n} + 2b) - \beta \sum_{m=1}^{\infty} c_{mn} \sqrt{\lambda_m} A_m = \frac{2}{\sqrt{\lambda_n} I_2(\sqrt{\lambda_n})}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (27)$$

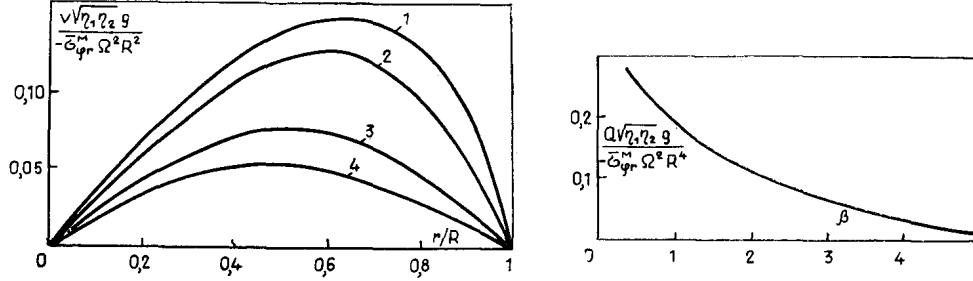


Рис. 2. Зависимость относительной скорости вторичного течения от r/R при значениях параметра β : 1 — 0,5, 2 — 1, 3 — 3, 4 — 5.

Рис. 3. Зависимость относительного расхода от параметра β .

Система линейных алгебраических уравнений (27) решалась численным путем методом исключения. Интегралы, входящие в выражение для c_{mn} , находились численным интегрированием по правилу Симпсона. Значения функций Бесселя, входящих в эти интегралы, также определялись численно с погрешностью $\varepsilon \sim 10^{-5}$. Подстановка коэффициентов A_n в соотношение (23) дало искомый профиль скорости. Численный расчет показал, что для получения точности определения скорости $\varepsilon_1 = 10^{-4}$ достаточно ограничиться 30 членами разложения в выражении (24). Поэтому решалась система (27) для 30 уравнений относительно искомых величин A_n при c_{mn} размером 30×30 . Одновременно по формуле

$$\bar{Q} = 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp(\sqrt{\lambda_n} \bar{z}) \int_0^1 \bar{r} I_1(\sqrt{\lambda_n} \bar{r}) d\bar{r}$$

определялся относительный расход. Некоторые результаты вычислений представлены на рис. 2—5. Интенсивность вторичного течения определяют: 1) внешние параметры — магнитные (H) и гидродинамические (Ω); 2) внутренние — характеристики дисперсионной среды (η_0) и дисперсной фазы (χ_a, φ_a); 3) геометрический фактор — радиус сосуда (R). Для анализа их влияния на скорость \bar{v} и расход \bar{Q} необходимо определить функциональные зависимости напряжения $\bar{\sigma}_{\varphi r}^M$ и вязкостей η_1, η_2 от этих величин. Наибольший интерес представляют сильные магнитные поля. Использование формул (13), (14) для $\bar{\sigma}_{\varphi r}^M$, выражения (12) для η_1 , а также результатов работы [1] и соотношения (7), позволяет получить для сильных магнитных полей (считая $\ln r_e \gg 1$)

$$\bar{\sigma}_{\varphi r}^M \approx -0,16 \mu_0 H^2 \chi_a \varphi_a, \quad \eta_1 \approx 0,01 \mu_0 H^2 \chi_a \varphi_a / \Omega, \quad \eta_2 = \eta_0. \quad (28)$$

Тогда зависимости для характерной скорости V , параметра β , масштаба глубины проникновения вторичного течения $\bar{z} = R\sqrt{\eta_2/\eta_1}$ имеют вид

$$V \approx 1,6 H \Omega^{5/2} R^2 \sqrt{\mu_0 \varphi_a \chi_a / \eta_0 / g}, \quad \beta \approx 0,1 H \sqrt{\mu_0 \varphi_a \Omega R \chi_a / (g \eta_0)}, \quad (29)$$

$$\bar{z} = R / 10 \sqrt{\eta_0 \Omega / (\mu_0 H^2 \chi_a \varphi_a)}.$$

Это позволяет оценить (по рис. 2—5) влияние всех задаваемых величин на характеристики процесса. С ростом напряженности поля возрастает интенсивность вторичных течений. Причиной этого является усиление структурообразования, что приводит к уменьшению размагничивающего фактора и к резкому увеличению вращающего магнитного момента. В очень сильных полях, когда степень анизодиамет-

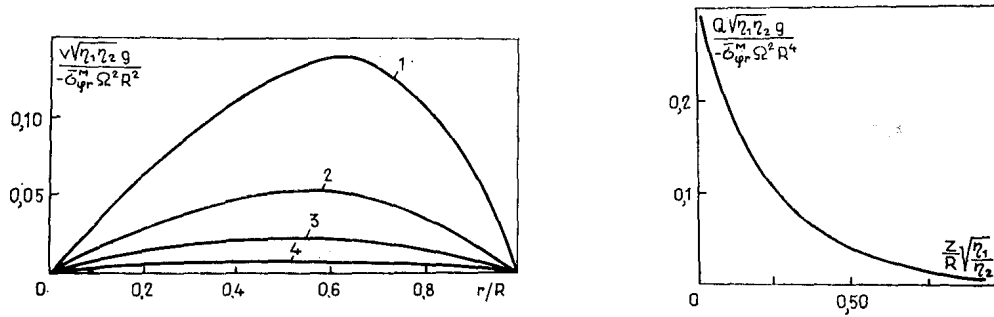


Рис. 4. Зависимость интенсивности вторичного течения от относительного расстояния до свободной границы \bar{z} : 1 — 0, 2 — 0,25, 3 — 0,5, 4 — 1.

Рис. 5. Изменение относительного расхода по глубине жидкости.

при агрегата велика, усиление поля уже не ведет к уменьшению размагничивающего фактора и вторичные потоки растут пропорционально \sqrt{H} . В результате этого при увеличении напряженности поля в 10 раз (с $\beta=0,5$ до $\beta=5$) максимальная скорость увеличивается менее чем в 4 раза (рис. 2). Отметим еще следующее обстоятельство. Для вращательного течения МРС в зазоре между соосными цилиндрами со свободной твердой границей вторичное течение в сильных полях практически перестает зависеть от напряженности поля (формулы (15) и (16)). При наличии свободной поверхности влияние H прослеживается даже для сильных полей. Это связано с двумерностью течения, для которого эффективная вязкость равна $\sqrt{\eta_1 \eta_2}$. Из-за этого характерная скорость $V \sim -\bar{\sigma}_{\varphi r}^M / \sqrt{\eta_1 \eta_2}$ в сильных полях согласно соотношению (29) линейно зависит от H , в то время как для случая неограниченных цилиндров $V \sim -\bar{\sigma}_{\varphi r}^M / \eta_1 = \text{const}(H)$. Это объясняется легкостью послойного течения жидкости при $\eta_1 \gg \eta_2$.

С увеличением угловой скорости вращения уменьшается радиус кривизны свободной поверхности. Это приводит к росту составляющей момента магнитных сил, направленной параллельно поверхности МРС, и к усилению интенсивности вторичных течений. Кроме того, с ростом Ω (согласно соотношению (5)) увеличиваются срезающие гидродинамические напряжения, которые действуют на частицы, расположенные на полюсах агрегата. Это приводит к уменьшению формфактора r_e и соответственно вязкости η_1 , что вызывает дополнительный рост скорости v . Уменьшение магнитных напряжений, которые могли бы снизить величину v , не наблюдается, так как размагничивающий фактор при достаточно больших значениях параметра r_e становится нечувствительным к нему.

Проанализируем влияние внутренних параметров МРС. Увеличение вязкости дисперсионной среды приводит согласно (28) к росту вязкости η_2 и, как следствие, к уменьшению величины V и соответственно интенсивности вторичных потоков. Однако это влияние сравнительно слабое, так как магнитные напряжения не зависят от η_0 . Вязкость влияет только на r_e ; напряжение $\bar{\sigma}_{\varphi r}^M$ в сильных полях не зависит от r_e . С увеличением концентрации дисперсной фазы и ее магнитной восприимчивости растут как магнитные напряжения, так и радиальная вязкость η_1 . Однако осевая вязкость η_2 остается постоянной. Поэтому характерная скорость V и параметр β функционально одинаково зависят от φ_a и χ_a . С учетом результатов численных расчетов это приводит к росту как скоростей (рис. 2), так и расходов (рис. 3).

По мере удаления от поверхности интенсивность вторичного течения падает (рис. 4, 5). Это падение носит ярко выраженный нелинейный характер. Таким образом, как это вытекает и из качественного анализа, вторичное течение локализуется в поверхностном слое.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шульман З. П., Зальцгендлер Э. Л., Хусид Б. М. Вращение магнитореологической суспензии в постоянном магнитном поле. I. Уравнение движения и граничные условия на свободной поверхности. — *Магнитная гидродинамика*, 1987, № 2, с. 89—94.
2. Jeffery G. B. The motion of ellipsoidal particles immersed in a viscous fluid. — *Proc. Roy. Soc.*, 1922, vol. 102, p. 161—179.
3. Шульман З. П., Кордонский В. И., Зальцгендлер Э. Л., Прохоров И. В., Хусид Б. М., Демчук С. А. Динамические и физические свойства ферросуспензий со структурой, перестраиваемой внешним магнитным полем. — *Магнитная гидродинамика*, 1984, № 4, с. 30—38.
4. Шлиомис М. И. Магнитные жидкости. — *УФН*, 1974, т. 112, № 3, с. 427—458.
5. Цеберс А. О. Межфазные напряжения в гидродинамике жидкостей с внутренними вращениями. — *Магнитная гидродинамика*, 1975, № 1, с. 79—82.
6. Цеберс А. О. Моментные напряжения и гидродинамика магнитной жидкости в однородных вращающихся магнитных полях. — *Магнитная гидродинамика*, 1978, № 4, с. 9—13.
7. Берковский Б. М., Исаев С. В., Кашевский Б. Э. Об одном эффекте внутренних степеней вращения в гидродинамике микроструктурных жидкостей. — *ДАН СССР*, 1980, т. 253, № 1, с. 62—65.
8. Таблицы нулей функций Бесселя. М.: ВЦ АН СССР, 1967. 95 с.

Поступила 27 октября 1986 г.