

УДК 537.84

Г. М. Гехт, В. И. Морозова

### ПРОДОЛЬНОЕ ОБТЕКАНИЕ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОЙ ЖИДКОСТЬЮ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ТРУБ В ПОПЕРЕЧНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Рассматривается установившееся течение вязкой электропроводной жидкости в бесконечно длинной периодической системе круглых труб (с непроводящей или тонкой проводящей оболочкой) в поперечном постоянном магнитном поле  $\mathbf{V}_0(0, B_0 \cos \alpha, B_0 \sin \alpha)$  при произвольном значении  $\alpha$ . Рассмотрение правомерно для центральной области сборки круглых труб, размеры которой значительно превышают межтрубные расстояния, так что токами, обусловленными наличием внешних границ, можно пренебречь. Геометрические центры труб лежат в вершинах прямоугольников (рис. 1). Подобная задача представляет интерес для некоторых приложений [1, 2].

При сделанных предположениях возможно существование развитого прямолинейного течения,  $\mathbf{u}(u(y, z), 0, 0)$  [3], а результирующее магнитное поле имеет вид  $\mathbf{B}(b(y, z), B_{0y}, B_{0z})$ . Периодичность задачи и отсутствие интегрального тока, текущего по жидкости, позволяют рассматривать течение только в одной ячейке. Введя безразмерные величины  $\tilde{y} = y/d$ ;  $\tilde{z} = z/d$ ;  $\tilde{B}_{0y} = B_{0y}/B_0$ ;  $\tilde{B}_{0z} = B_{0z}/B_0$ ;  $\tilde{b} = b/(Rm B_0)$ ;  $\tilde{u} = u/u_0$ ;  $\tilde{a} = a/d$ ;  $\tilde{c} = c/d$ , где  $u_0 = |dp/dx|(d^2/\mu)$ ;  $Rm = \mu_0 \sigma u_0 d$ , получим систему безразмерных уравнений, описывающую течение (знак «тильда» в дальнейшем опущен):

$$\Delta u + Na^2 \left( \frac{\partial b}{\partial y} B_{0y} + \frac{\partial b}{\partial z} B_{0z} \right) = 1; \quad \Delta b + \frac{\partial u}{\partial y} B_{0y} + \frac{\partial u}{\partial z} B_{0z} = 0 \quad (1), (2)$$

$$(Na = B_0 d \sqrt{\sigma/\mu}).$$

Граничные условия на поверхности трубы следующие: для скорости

$$u = 0, \quad (3)$$

для магнитной индукции в предположении «тонкой» ( $h \ll d$ ) оболочки

$$b = -C \partial b / \partial n, \quad (4)$$

где  $C = \sigma_w h / \sigma d$ ;  $h$  и  $\sigma_w$  — толщина и проводимость оболочки;  $n$  — внутренняя нормаль. Для труб с непроводящей оболочкой ( $C = 0$ ) условие (4) принимает вид  $b = 0$ . На границах ячейки ставилось условие периодичности, т. е. непрерывности функций и их нормальных производных по обе стороны от границы на участках  $z = a/2$ ;  $y = c/2$  и  $z = -a/2$ ;  $y = -c/2$  соответственно.

Решение поставленной задачи осуществлялось методом конечных элементов [4]. В качестве конечных брались линейные треугольные элементы. Триангуляция проводилась по специально разработанному для данной области алгоритму, допускающему измельчение треугольных элементов у поверхности труб.

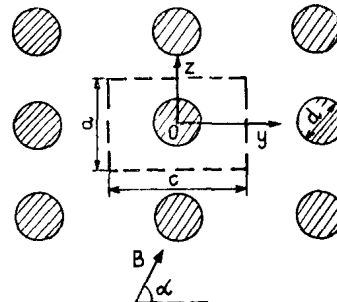


Рис. 1. К постановке задачи.

Метод конечных элементов применялся в сочетании с методом Галеркина, что приводило к уравнениям

$$\int_{S^e} N_q^e L_1(u, b) ds = 0; \quad \int_{S^e} N_q^e L_2(u, b) ds = 0, \quad (5), (6)$$

где  $L_1, L_2$  — дифференциальные операторы, отвечающие уравнениям (1) и (2) соответственно;  $N_q^e$  — линейные функции формы  $e$ -го элемента с вершинами в узлах  $i, j, k$ ;  $q = i, j, k$ .

Преобразовав (5) и (6), получим окончательное выражение для матрицы жесткости  $e$ -го элемента, определяемое из уравнений

$$\int_{L^e} N_q^e \frac{\partial u^e}{\partial n} dl - \int_{S^e} \left\{ \frac{\partial N_q^e}{\partial y} \frac{\partial u^e}{\partial y} + \frac{\partial N_q^e}{\partial z} \frac{\partial u^e}{\partial z} - \left[ \text{Ha}^2 \left( \frac{\partial b}{\partial y} B_{0y} + \frac{\partial b}{\partial z} B_{0z} \right) - 1 \right] N_q^e \right\} ds = 0;$$

$$\int_{L^e} N_q^e \frac{\partial b^e}{\partial n} dl - \int_{S^e} \left[ \frac{\partial N_q^e}{\partial y} \frac{\partial b^e}{\partial y} + \frac{\partial N_q^e}{\partial z} \frac{\partial b^e}{\partial z} - \left( \frac{\partial u^e}{\partial y} B_{0y} + \frac{\partial u^e}{\partial z} B_{0z} \right) N_q^e \right] ds = 0.$$

Здесь

$$u^e = N_i^e \Phi_{2i-1} + O \Phi_{2i} + N_j^e \Phi_{2j-1} + O \Phi_{2j} + N_k^e \Phi_{2k-1} + O \Phi_{2k};$$

$$b^e = O \Phi_{2i-1} + N_i^e \Phi_{2i} + O \Phi_{2j-1} + N_j^e \Phi_{2j} + O \Phi_{2k-1} + N_k^e \Phi_{2k},$$

где  $\Phi_{2i-1}, \Phi_{2j-1}, \Phi_{2k-1}$  — искомые значения  $u$  в вершинах элемента, а  $\Phi_{2i}, \Phi_{2j}, \Phi_{2k}$  — значения  $b$ ;  $L^e$  — граница элемента  $S^e$ ;  $n$  — внешняя нормаль к  $L^e$ .

Необходимые граничные условия учитывались путем преобразования матрицы жесткости, полученной в результате суммирования матриц жесткости отдельных элементов. Это преобразование осуществлялось следующим образом:  $(2k-1)$ -е уравнение заменялось на уравнение  $\Phi_{2k-1} - \Phi_{2m-1} = 0$  согласно условиям периодичности в узлах  $m$  и  $k$ , лежащих на соответствующих участках границы ячейки, а  $(2m-1)$ -е уравнение — на сумму  $(2m-1)$ -го и  $(2k-1)$ -го уравнений. Аналогично проводилось преобразование для четных узловых значений, отвечающих  $b$ .

Граничные условия (3) и (4) учитывались путем преобразования матрицы жесткости по методике, приведенной в [4]. Расчеты осуществлялись при значениях числа Гартмана в диапазоне  $0 \dots 2000$ . Распределение модуля безразмерной скорости в случае труб с непроводящей оболочкой на осях прямоугольной ячейки ( $a=2$ ;  $c=3$ ) при различных значениях  $\alpha$  и  $\text{Ha}$  показаны на рис. 2. Видно, что наличие магнитного

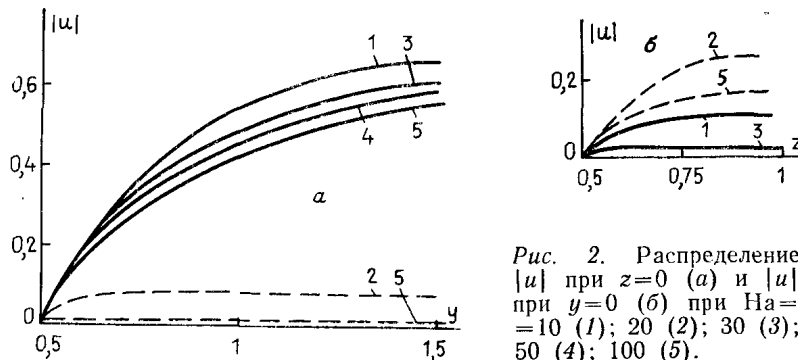


Рис. 2. Распределение  $|u|$  при  $z=0$  (а) и  $|u|$  при  $y=0$  (б) при  $\text{Ha} = 10$  (1); 20 (2); 30 (3); 50 (4); 100 (5).

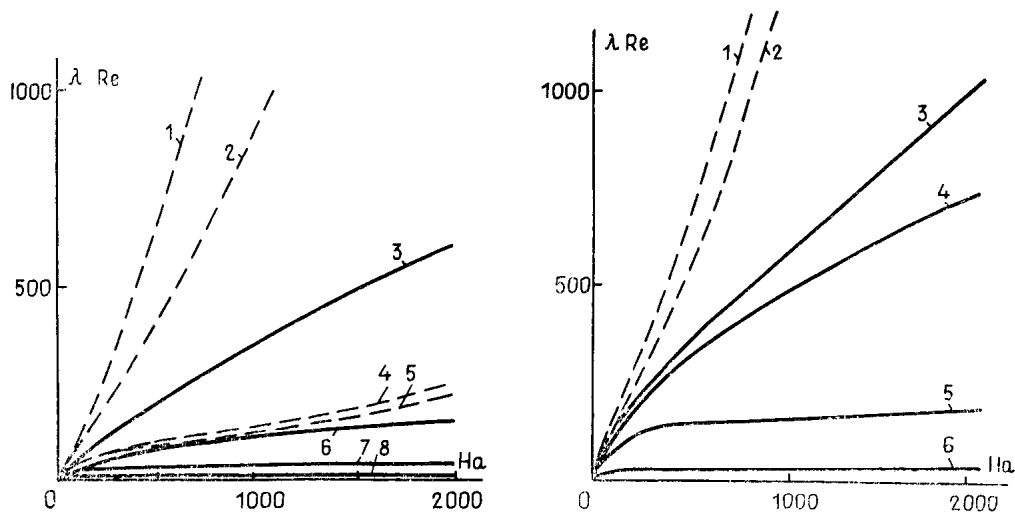


Рис. 3. Зависимости  $\lambda Re$  от  $Ha$  для прямоугольной ячейки. Трубы с проводящей оболочкой (---) при  $\alpha = \pi/4$  и  $C = 0,01$  (1); 0,001 (2); при  $\alpha = \text{arctg}(a/c)$  и  $C = 0,1$  (4); 0,0025 (5). Трубы с непроводящей оболочкой (—) при  $\alpha = \pi/4$  (3);  $\text{arctg}(a/c)$  (6); 0 (7);  $\pi/2$  (8).

Рис. 4. Зависимости  $\lambda Re$  от  $Ha$  для квадратной ячейки: (---) — для  $C = 0,0025$  при  $\alpha = \pi/6$  (1);  $\pi/12$  (2); (—) — для  $C = 0$  при  $\alpha = \pi/6$  (3);  $\pi/12$  (4);  $\pi/4$  (5); 0 (6).

поля приводит, как и в случае прямоугольных труб [5], к существенной перестройке гидродинамического потока вследствие эффекта Гартмана. Действительно, уже при  $Ha = 20$  на оси, параллельной магнитному полю, распределение скорости близко к гартмановскому, а на оси, перпендикулярной магнитному полю, профиль скорости подобен пуазейлевскому. Перестройка потока в этих случаях приводит к образованию щелевого течения, т. е. весь расход в основном сосредоточен в щели, образованной плоскостями, параллельными магнитному полю и касательным к поверхности труб. Образование такого щелевого течения происходит и при  $\alpha = \text{arctg}(a/c)$ .

На рис. 3 показаны зависимости для прямоугольной решетки ( $a = 2$ ;  $c = 3$ ) величины  $\lambda Re$  (где  $\lambda = |dp/dx| / (\rho u_{\text{ср}}^2 / 2d)$ ;  $Re = u_{\text{ср}} d / \nu$  определено по средней расходной скорости) от  $Ha$  при различных углах наклона магнитного поля и разных значениях параметра  $C$ . Видно, что  $\lambda Re$  существенно зависит от величины  $\alpha$ . Когда направление магнитного поля совпадает с осями симметрии, как указывалось выше, возможно образование щелевого течения. При таком течении магнитное поле при достаточно больших значениях  $Ha$  практически не взаимодействует с движущимся металлом в щели; режим течения близок к пуазейлевскому, а коэффициент гидравлического сопротивления  $\lambda$  слабо зависит от  $Ha$ . В этих случаях  $\lambda$  также слабо зависит и от  $C$ , однако, когда направление магнитного поля совпадает с диагональю ячейки, эта зависимость более существенна.

Если направление магнитного поля не совпадает с осями симметрии и образование щелевого течения невозможно, то коэффициент гидрав-

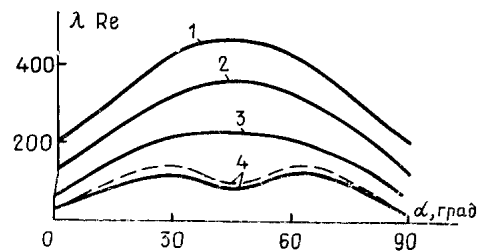


Рис. 5. Зависимости  $\lambda Re$  от угла наклона магнитного поля для квадратной ячейки.  $C = 0$  (—) и 0,0025 (---) при  $a = 1,3$  (1); 1,4 (2); 1,6 (3); 2 (4).

лического сопротивления сильно зависит от  $Na$  и  $C$ . При  $C=0$  эта зависимость при больших значениях  $Na$ , очевидно, близка к линейной, а при  $C \neq 0$  имеет параболический характер; то же (рис. 4) наблюдается и для квадратной ячейки ( $a=c=2$ ). На рис. 5 представлены зависимости  $\lambda Re$  от угла наклона магнитного поля при  $Na=100$  для квадратной ячейки при различных значениях  $a$ . Величина  $\lambda Re$  имеет минимумы в случае направленности магнитного поля вдоль осей ячейки, а также при  $\alpha=45^\circ$ , если выполняется геометрическое условие возможности образования щелевого течения (т. е.  $a > \sqrt{2}$ ).

Расчеты для некоторых предельных случаев, допускающих сопоставление полученных результатов с ранее известными, показали удовлетворительную точность. Так, отличие значений коэффициента гидравлического сопротивления для квадратной ячейки при разных  $a$  в отсутствие магнитного поля от значений, приведенных в [6], составляло не более 7%. Результаты расчетов для  $a=1,01$ ;  $C=0$ ;  $\alpha=\pi/2$  отличались от соответствующих данных для сомкнутых труб [5] на 8%.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Муравьев Е. В., Орлов В. В., Хрипунов В. Е. Жидкометаллическое охлаждение гибридного реактора-токамака // *Вопр. атом. науки и техники. Сер. Термоядер. синтез.* — 1985. — Вып. 4. — С. 24—29.
2. Шмелев А. Н., Грязнов А. Б., Подобед С. С. О возможности использования сильного магнитного поля для улучшения характеристик ядерных реакторов с жидкометаллическим охлаждением // 10-е Риж. совещ. по магнит. гидродинамике. — Рига, 1981. — Т. 2. — С. 104—105.
3. Ватажин А. Б., Любимов Г. А., Регирер С. А. Магнитогидродинамические течения в каналах. — М., 1970. — 672 с.
4. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. — М., 1979. — 392 с.
5. Гехт Г. М., Элькин А. И. Течение электропроводной жидкости в периодической системе труб // *Магнит. гидродинамика.* — 1983. — № 2. — С. 88—90.
6. Кириллов П. Л., Юрьев Ю. С., Бобков В. П. Справочник по теплогидравлическим расчетам. — М., 1984. — 294 с.

*Поступила в редакцию 10.08.87*