МАГНИТНАЯ ГИДРОДИНАМИКА. — 1991. — № 2. — С. 55...58

УДК 537.84

*А. Гайлитис, Г. Гербет**

ВЛИЯНИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА ТЕРМОКАПИЛЛЯРНОЕ ДВИЖЕНИЕ В ПРОВОДЯЩЕЙ КАПЛЕ

В последнее время обсуждается возможность [1] замены неподвижных экранов дивертора устройств термоядерного синтеза завесой из свободно падающих жидкометаллических капель. В завесе капля подвержена сильному одностороннему нагреву, создающему градиент поверхностного натяжения. Возникает проблема оценки возможных термокапиллярных движений.

Имеющиеся исследования термокапиллярных движений проведены для электронепроводящих капель [2] и их результаты могут быть использованы при рассмотрении металлических капель только в отсутствие магнитного поля, точнее, при малых значениях числа Гартмана ($\mathrm{Ha} \ll 1$). Ожидаемый в завесе нагрев (~ 1 МВт/м^2) без поля должен вести к существенным внутрикапельным скоростям $u \sim 1$ м/с и, как следствие, к конвективному теплопереносу внутри капли. Может возникнуть даже дробление капель.

Реально завеса работает в сильном магнитном поле и справедливо обратное условие — $\mathrm{Ha} \gg 1$. Поле тормозит движение, и отмеченные явления ослабляются. Для уточнения количественной стороны ниже решена гидродинамическая задача о термокапиллярном движении при $\mathrm{Ha} \gg 1$.

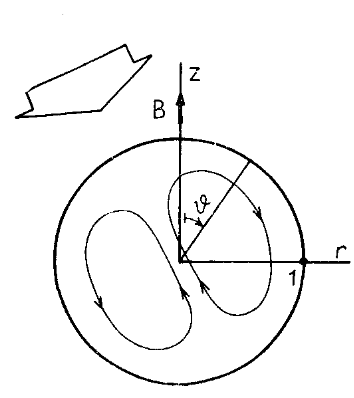
Постановка задачи. Пусть в пустоте имеется сферическая капля (рис.), на поверхности которой поддерживается неравномерное распределение температуры $T(\vartheta, \varphi)$. Как следствие, и поверхностное натяжение неравномерно:

$$\alpha(\vartheta, \varphi) \approx \alpha(T_0) + (T(\vartheta, \varphi) - T_0)\, \mathrm{d}\alpha/\mathrm{d}T;$$

здесь T_0 — средняя температура; r, ϑ, φ — сферические координаты. При $|\alpha(\vartheta, \varphi) - \alpha(T_0)| \ll \alpha(T_0)$ поверхность капли остается приближенно сферической. Внутри нее возникает термокапиллярное движение согласно граничному условию

$$\mathrm{grad}_{\vartheta,\varphi}\alpha(\vartheta, \varphi) = \eta r \frac{\partial}{\partial r}(u_{\vartheta,\varphi}/r)\,|_{r=R}. \qquad (1)$$

При наложении внешнего магнитного поля граничное условие (1) не изменяется. В стоксовом пределе $\mathrm{Re} \ll \max(\mathrm{Ha}^2, 1)$ поле B, вязкость η и электропроводность σ входят в уравнения движения только посредством числа Гартмана $\mathrm{Ha} = B\mathbf{R}(\sigma/\eta)^{1/2}$. Магнитным числом Рейнольдса пренебрегается. За единицу длины принят радиус капли ($R = 1$). Наряду с упомянутой сферической системой координат используется и цилиндрическая



К постановке задачи. В направлении широкой стрелки поступает нагрев; схема движения внутри капли проиллюстрирована замкнутыми кривыми.

* Центральный институт ядерных исследований АН ГДР.

ρ, φ, z с осью z вдоль внешнего однородного магнитного поля $\mathbf{B}$. Перпендикулярные к $\mathbf{B}$ составляющие векторов ниже помечены индексом $\perp$. Обозначено $s=\sin\vartheta$, $c=\cos\vartheta$, $\Delta_\perp=\Delta-\partial^2/\partial z^2$.

Исключение давления и электрического потенциала из уравнений МГД достигается подстановкой Гото:

$$\mathbf{u}_\perp=\mathrm{grad}_\perp P^+ + \mathrm{rot}\,(\Phi^+\mathbf{e}^z); \quad u_z=\partial P^+/\partial z-\mathrm{Ha}\,P^-, \tag{2}$$

которая определение шести величин — трех компонент скорости $\mathbf{u}$ и трех компонент плотности электрического тока $\mathbf{j}$ — сводит к решению четырех уравнений

$$(\Delta-\mathrm{Ha}\,\partial/\partial z)\,(P^1,\Phi^1)=0; \quad (\Delta+\mathrm{Ha}\,\partial/\partial z)\,(P^2,\Phi^2)=0 \tag{3}$$

и к вычислению четырех скалярных функций $P^\pm=P^1\pm P^2$; $\Phi^\pm=\Phi^1\pm\Phi^2$.

Согласно [3] ток равен

$$\mathbf{j}_\perp=\mathrm{rot}\,(P^+\mathbf{e}^z)-\mathrm{Ha}^{-1}\,\mathrm{grad}_\perp\,\partial\Phi^-/\partial z; \quad j_z=\partial\Phi^+/\partial z-\mathrm{Ha}^{-1}\,\partial^2\Phi^-/\partial z^2.$$

Для четырех функций двух граничных условий (1) недостаточно. Требуется еще исчезновение пересекающих поверхность компонент скорости и электрического тока:

$$u_r=0|_{r=1}; \quad j_r=0|_{r=1}. \tag{4}$$

Если в (1) $\alpha(\vartheta,\varphi)$ задать в виде $\alpha(\vartheta,\varphi)=\Sigma\alpha^m(\vartheta)e^{im\varphi}$, то можно отдельно вычислить движение, вызванное каждым из членов в отдельности, а результаты просто сложить. Ниже индекс m у $\alpha(\vartheta)$ не пишем, считая, что в сумме есть всего только один член, т. е. $\alpha(\vartheta)$, и все искомые величины пропорциональны $\exp(im\varphi)$. В цилиндрических координатах

$$\begin{gathered} rj_r=\mathrm{Ha}^{-1}(z\Delta_\perp-\rho\partial^2/\partial\rho\partial z)\Phi^-+imP^+; \quad ru_r=(\rho\partial/\partial\rho+z\partial/\partial z)P^+- \\ -\mathrm{Ha}\,zP^-+im\Phi^+; \quad ru_\vartheta=(z\partial/\partial\rho-\rho\partial/\partial z)P^++\mathrm{Ha}\,\rho P^-+imz/\rho P^+. \end{gathered} \tag{5}$$

Использованные дифференциальные операторы равны

$$\begin{gathered} z\Delta_\perp-\rho\partial^2/\partial\rho\partial z=(\partial/\partial\vartheta+z/\rho)\,\partial/\partial\rho-zm^2/\rho^2; \\ \rho\partial/\partial\rho+z\partial/\partial z=r\partial/\partial r; \quad z\partial/\partial\rho-\rho\partial/\partial z=\partial/\partial\vartheta. \end{gathered} \tag{6}$$

Асимптотические решения при больших числах Гартмана ($\mathrm{Ha}\gg1$). Для наглядного представления свойств уравнений (3) удобно число Гартмана Ha мысленно приравнять числу Пекле и $\Phi^{1,2}$ или $P^{1,2}$ — температуре. Тогда каждое из уравнений (3) идентично уравнению теплопроводности в однородно движущейся среде. Для Φ^1 и P^1 воображаемая среда внутри сферической полости $r\leqslant1$ движется в направлении оси z, а для Φ^2 и P^2 — в направлении $-z$. Аналогия, разумеется, чисто формальная и не имеет никакого отношения к реальному теплопереносу внутри рассматриваемой капли. Однако она полезна при построении асимптотических решений для $\mathrm{Ha}\gg1$ [4]:

а) внутри полости $r\leqslant1$ решение $\Phi^1(\rho,\varphi,z)$ полностью определяется значением Φ^1 на поверхности $r=1$; то же верно и для Φ^2, P^1 и P^2;

б) при больших $\mathrm{Ha}\gg1$ «тепло» в основном переносится вместе со средой. Почти во всем объеме капли роль «теплопроводности» незначительна, вдоль «линии тока» «температура» почти постоянна, и равна «температуре» нижней стенки

$$\Phi^1(\rho,\varphi,z)=\Phi^1[\rho,\varphi,-(1-\rho^2)^{1/2}]+O(\mathrm{Ha}^{-1});$$

в) вблизи верхней стенки образуется «температурный» (точнее — гартмановский) пограничный слой толщины $1/(\mathrm{Ha}\,c)$, в котором «температура» резко достигает «температуры» верхней стенки:

$$\begin{gathered} \Phi^1(\rho,\varphi,z)\approx\Phi^1[\rho,\varphi,-(1-\rho^2)^{1/2}]+\delta\Phi^1; \\ \delta\Phi^1=\{\Phi^1[\rho,\varphi,(1-\rho^2)^{1/2}]-\Phi^1[\rho,\varphi,-(1-\rho^2)^{1/2}]\}\exp[\mathrm{Ha}\,c(r-1)]. \end{gathered} \tag{7}$$

Форма гартмановского слоя, пропорционального $\exp[\mathrm{Ha}\, c(r-1)]$, получается подстановкой (7) в уравнение (3) и удержанием ведущего по Ha члена. Для $\delta\Phi^1$ этого достаточно, для δP^1 необходимо найти решение в следующем приближении: уточненное решение уравнения

$$(\Delta - M\partial/\partial z)\,\delta P^1 = 0 \tag{8}$$

ищем в виде

$$\delta P^1 = \exp\,[a(r, c) + im\varphi]; \tag{9}$$

подстановка (9) в (8) дает

$$a_{rr} + a_r^2 + 2a_r/r + (1-c^2)\,(a_{cc} + a_c^2)/r^2 - 2ca_c/r^2 - m^2/[(1-c^2)r^2] -$$
$$- \mathrm{Ha}\,[ca_r + (1-c^2)a_c/r] = 0$$

(обозначено $a_r = \partial a/\partial r$ и т. д.) Два первых члена решения равны

$$a_r = \mathrm{Ha}\, c - 2 + a_c(1-c^2)/c + O(\mathrm{Ha}^{-1}). \tag{10}$$

Ведущий член $\mathrm{Ha}\, c$ приводит к (7). Выражение (10) в целом дает асимптотическое соотношение

$$(r\partial/\partial r - \mathrm{Ha}\, z)\,\delta P^1|_{r=1} \approx -(s\partial/\partial s + s^2/c^2 + 2)\,\delta P^1|_{r=1}. \tag{11}$$

Все это относится и к Φ^2, P^2, только гартмановский слой образуется у нижней поверхности капли.

Течение в капле, нагретой симметрично относительно поля. При симметричном нагреве ($m=0$) картина течения весьма проста. Максимальные скорости возникают в гартмановском слое, где в согласии с (1)

$$u_\vartheta = (\mathrm{d}\alpha/\mathrm{d}\vartheta)\,\exp\,[\,|c|\,\mathrm{Ha}\,(r-1)]/(\eta\,|c|\,\mathrm{Ha}).$$

Полный расход вещества через всю толщину гартмановского слоя в $c\,\mathrm{Ha}$ раз меньше (здесь $+/-$ относятся к верхней/нижней поверхностям капли):

$$q^{\pm}(\rho) = \pm\,(\mathrm{d}\alpha/\mathrm{d}\vartheta)/(\eta c^2\, \mathrm{Ha}^2). \tag{12}$$

В основном объеме капли поток (12) замыкается. Возврат его состоит из однородного по z течения к оси и линейного по z растекания вдоль поля:

$$2u_\rho = -\,[q^+(\rho) + q^-(\rho)]/(1-\rho^2)^{1/2};$$
$$2u_z = (\rho^{-1}\partial/\partial\rho)\,[z\rho\,(q^+ + q^-)/(1-\rho^2)^{1/2} + \rho\,(q^+ - q^-)].$$

По порядку величины скорость в гартмановском слое в Ha раз, а в основном объеме в Ha^2 раз меньше, чем без магнитного поля.

Капля, нагретая несимметрично по отношению к полю ($m\neq 0$). Для уменьшения числа одновременно определяемых функций произвольное $\alpha(\vartheta)$ следует представить как сумму четной ($\alpha(-\vartheta) = \alpha(\vartheta)$) и нечетной частей. Мы ниже приводим решение для четного случая, когда $P^1(\rho, z) = P^2(\rho, -z)$, $\Phi^1(\rho, z) = \Phi^2(\rho, -z)$.

В верхней полукапле гартмановский слой δP, $\delta\Phi$ образуют только P^1 и Φ^1. С необходимой точностью здесь

$$\Phi^+ = \Phi_0 + \delta\Phi;\quad \Phi^- = \frac{z}{\mathrm{Ha}}\,\Delta\Phi_0 + \delta\Phi;\quad P^+ = P_0 + \delta P;\quad P^- = \frac{z}{\mathrm{Ha}}\,\Delta P_0 + \delta P. \tag{13}$$

В (13) все величины пропорциональны $\exp(im\varphi)$. Кроме того Φ_0, P_0 являются функциями ρ, а δP и $\delta\Phi$ — произведениями медленных функций от c на множитель гартмановского пограничного слоя $\exp[c\,\mathrm{Ha}\times$ $\times(r-1)]$.

При подстановке (13) в граничные условия (1) и (4) вычисление производных от Φ_0 и P_0 не представляет трудностей. При обработке

$\delta\Phi$ и δP старшие члены в (5) сокращаются. Для получения действительно ведущих членов приходится дифференциальные операторы использовать в виде (6) и для δP применять также асимптотическое тождество (11). Из граничных условий следуют ведущие члены ($r=1$):

$$\begin{gathered}\delta P=(\eta sc)^{-1}\,\mathrm{Ha}^{-2}\,\partial\alpha/\partial\vartheta;\quad \delta\Phi=-im\alpha/(\eta s^2c^2\,\mathrm{Ha}^2);\\ P_0=icm^{-1}(2+s\partial/\partial s)c\delta\Phi-\delta P;\quad \Phi_0=im^{-1}[(s\partial/\partial s-c^2\Delta)P_0-\\ -(2+s^2/c^2+s\partial/\partial s)\delta P]-\delta\Phi.\end{gathered}\tag{14}$$

Формулами (14) задача в принципе решена — сведена к вычислению производных от заданной функции $\alpha(\vartheta)$. Сначала вычисляются δP, $\delta\Phi$, потом P_0 и Φ_0. Все значения получаются на поверхности капли $r=1$. Для перехода внутрь капли в P_0, Φ_0 аргумент s следует заменить на ρ и к δP, $\delta\Phi$ приписать множитель гартмановского пограничного слоя $\exp[c\,\mathrm{Ha}(r-1)]$. Повторным дифференцированием вычисляются скорости (2).

Величины δP, $\delta\Phi$, Φ_0, P_0, равно как и скорость в основном объеме капли, оказываются порядка $1/\mathrm{Ha}^2$. В гартмановском слое и на поверхности скорость больше — порядка $1/\mathrm{Ha}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Демьяненко В. Н., Карасев Б. Г., Колесниченко А. Ф., Лаврентьев И. В., Лиелаусис О. А., Муравьев Е. В., Тананаев А. В.* Жидкий металл в магнитном поле реактора-токамака // Магнит. гидродинамика. — 1988. — № 1. — С. 104...124.

2. *Oliver D. L. R., Witt K. J. de.* Surface tension driven flows for a droplet in a micro-gravity environment // Intern J. Heat Mass Transfer. — 1988. — Vol. 31, N 7. — P. 1534...1537.

3. *Gotoh K.* Stokes flow of an electrically conducting fluid in a uniform magnetic field // J. Phys. Soc. Japan. — 1960. — Vol. 15, N 4. — P. 696...705.

4. *Гайлитис А., Гербет Г.* О стоксовом обтекании круглого цилиндра в сильном поперечном магнитном поле // Магнит. гидродинамика. — 1987. — № 2. — С. 137...139.

Поступила в редакцию 29.05.90