

УДК 537.84

С. Е. Дворчик, С. А. Лифиц, С. Ю. Реуцкий

О СИНТЕЗЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ В ЗАДАЧАХ МАГНИТОЖИДКОСТНОЙ СЕПАРАЦИИ

В настоящей работе на примере задачи сепарации немагнитных тел в магнитной жидкости (МЖ) рассмотрены вопросы синтеза заданного магнитного поля. Физические принципы работы магнитожидкостных сепараторов заключаются в создании регулируемой объемной электромагнитной силы плотностью

$$\mathbf{f} = \mu_0 J \nabla \mathbf{H}, \quad (1)$$

где

$$J = J_s L(\alpha H) \quad (2)$$

магнитный момент единицы объема МЖ; $L(\alpha H)$ — функция Ланжевена; H — результирующее магнитное поле. Однако, если тело не возбуждает токов в обмотке возбуждения магнитной системы, то при вычислении интегральной силы, действующей на малое слабо магнитное тело, в (1) и (2) можно использовать внешнее магнитное поле. Таким образом, H — это поле, зависящее от свойств МЖ, конструкции и режима питания магнитной системы, но не зависящее от наличия или отсутствия погруженных в МЖ немагнитных тел. Согласно принятому в метрологии положению при $\mu \leq 1,5$ размагничивающим действием среды на распределение поля можно пренебречь [1]. Для МЖ, используемых в технических приложениях, это неравенство справедливо при индукциях $B > 0,025$ Тл, что всегда выполняется в реальных магнитожидкостных сепараторах. Это позволяет рассчитывать поле в магнитной системе без учета свойств МЖ, а условие $\mu \neq 1$ учесть в выражении для силы (1) через зависимость $J = J(H)$. Тогда требования к магнитожидкостным сепараторам могут быть сформулированы в виде условий на характеристики поля магнитной системы.

Расчет и проектирование магнитожидкостных сепараторов, как правило, ведутся на основе анализа уравнений движения уединенной частицы. При этом в рабочем объеме правильно сконструированного аппарата расстояние между двумя первоначально близкими частицами разного удельного веса возрастает. Количественной характеристикой этого процесса может служить длина разделения L , определение которой зависит от способа удаления частиц из сепаратора. Например, пусть движение частиц начинается в точке $y=0, x=A$ и происходит в плоскости xy (рис. 1), т. е. сепарация осуществляется на «проваливание». В таком случае естественной характеристикой разделения частиц с удельным весом γ_T и $\gamma_T + \Delta\gamma_T$ может служить то расстояние $\Delta L = \Delta y$, на которое они разошлись, достигнув линии $x=0$, откуда происходит их удаление. При ином способе удаления частиц изменится и определение длины разделения.

Удобно ввести такую характеристику, как линейная дисперсия сепаратора: $D_L = dL/d\gamma_T$. Аналогично вводится угловая дисперсия D_φ , дисперсия по энергии D_W для частиц, попадающих в сепаратор со значительной кинетической энергией, и т. п. (подробней см. [2]). Полезно также понятие обратной дисперсии. Например, $S_L = 1/D_L = d\gamma_T/dL$ характеризует разницу удельных весов на единицу длины разделения. Чем меньше S_L , тем выше чувствительность (предел разрешения) прибора:

$$\Pi_L = \Delta\gamma_T = S_L \Delta L_m,$$

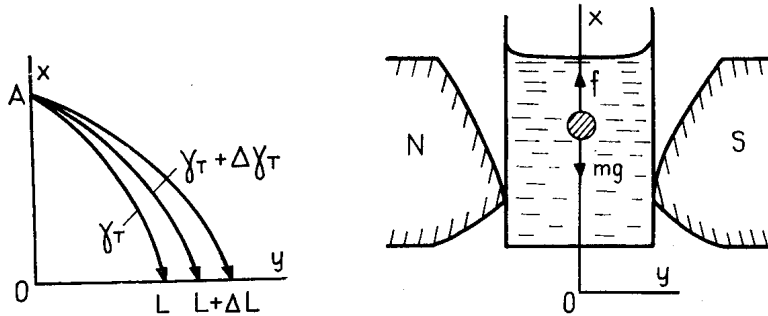


Рис. 1. Определение длины разделения L магнитожидкостного сепаратора.

Рис. 2. Схема магнитожидкостного сепаратора.

где ΔL_m — минимально допустимое расстояние между частицами на выходе сепаратора, которое задается техническими возможностями и размерами разделяемых частиц.

Остановимся на аппаратах, работающих в режиме всплытие—проваливание, с одномерным движением сепарируемых частиц, когда g параллельно магнитной силе f (рис. 2) и требуется определить двухмерное магнитное поле $H(x, y)$. Введем эффективный удельный вес МЖ:

$$\gamma_a = \gamma - \mu_0 J \partial H / \partial x. \quad (3)$$

Если в рабочем объеме сепаратора создать область, в которой $\gamma_a = \text{const}$, то тела с удельным весом $\gamma_T > \gamma_a$ будут в этой области тонуть, а с $\gamma_T < \gamma_a$ — всплывать. В этом случае $D_L \rightarrow \infty$, а $S_L \rightarrow 0$, что соответствует максимальной чувствительности прибора. Здесь реализуется идеальный случай сепарации, однако его осуществление требует решения обратной задачи синтеза заданного магнитного поля.

Таким образом, проблема заключается в нахождении формы полюсных наконечников магнитной системы по заданным в некоторой области $G \in \mathcal{R}^n$ ($n=2, 3$) характеристикам поля. Математически задача сводится к минимизации некоторого функционала, определяющего отклонение поля от заданного. Пусть $q = \{q_k\}$, $k=1, \dots, N$ есть множество варьируемых параметров магнитной системы и каждый их набор однозначно определяет создаваемое ею магнитное поле $H = H(z|q)$. Тогда, если H_{0i} — заданные значения магнитного поля в некоторых точках $z_i \in G$, $i=1, \dots, M$, $M \gg N$, то параметры q_k , задающие форму полюсов, определяются из условия

$$\min_q \Delta = \min_q \sum_{i=1}^M \|H(z_i|q) - H_{0i}\|^2. \quad (4)$$

В качестве q можно взять координаты некоторого множества точек на искомой поверхности полюсов. Это прямой и наиболее естественный способ параметризации. Тогда решение задачи (4) сразу же и единственным образом определяет форму полюсов. Однако в этом случае вычисление функционала в (4) при каждом конкретном наборе параметров q_k включает решение прямой задачи магнитостатики для каждой новой конфигурации магнитной системы, что делает нереалистичным решение задач (4) с числом параметров $N > 2 \dots 3$.

Ниже предлагается более опосредованный способ параметризации. Предположим, что поле, которое мы синтезируем, создается системой фиктивных «магнитных зарядов», расположенных в вакууме, а токи и ферромагнетики отсутствуют. Первый шаг алгоритма заключается в выборе координат z_k и величин q_k этих зарядов, удовлетворяющих (4). Преимущество такой параметризации состоит в том, что для $H(z|q)$

существует аналитическое выражение, и задача (4) решается эффективно. На втором этапе необходимо определить магнитную систему, эквивалентную системе найденных «магнитных зарядов».

Перейдем к конкретным формулировкам. Рассматривается плоский случай ($n=2$), железо предполагается ненасыщенным ($\mu=\infty$), положение «магнитных зарядов» не варьируется. Для описания поля вводим скалярный магнитный потенциал Φ : $H_x = -\partial\Phi/\partial x$; $H_y = \partial\Phi/\partial y$. Поскольку система симметрична относительно оси x , то

$$\Phi(x, y|q) = \sum_{k=1}^N q_k \ln(r_{1k}/r_{2k}), \quad (5)$$

где $r_{1k} = \sqrt{(x-x_k)^2 + (y-y_k)^2}$; $r_{2k} = \sqrt{(x-x_k)^2 + (y+y_k)^2}$.

Пусть на отрезке CD оси x (рис. 3) задана y -составляющая магнитного поля $H_y(x, 0) = f(y)$ (H_x в силу симметрии здесь равна нулю). Коэффициенты q_k находятся из условия

$$\min_q \sum_{i=1}^M (H_y(x_i, 0) - f_i)^2. \quad (4')$$

Здесь $\{x_i\}$, $i=1, \dots, M$ — множество точек на отрезке CD ; $f_i = f(x_i)$, $M \gg N$.

Так как координаты зарядов не варьируются, в выражение для H_y параметры входят линейно и (4') представляет собой линейную задачу наименьших квадратов, которая эффективно решается методом ортогональных преобразований [3]. В частности использовался алгоритм DLLSQ, входящий в пакет научных программ на языке Фортран [4].

Поскольку принято, что в железе $\mu=\infty$, то на контуре полюса Γ должно выполняться условие $\Phi = C = \text{const}$, которое и служит для его построения. Существует однопараметрическое семейство контуров $\Gamma(C)$. Если $C_1 \neq C_2$, то $\Gamma(C_1)$ и $\Gamma(C_2)$ не имеют общих точек. Как следует из (5), каждому контуру $\Gamma(C)$ соответствует симметричный ему относительно оси y контур $\Gamma(-C)$ (см. рис. 3). Поэтому

$$\int_S \mathbf{H} d\mathbf{l} = 2C \quad (6)$$

по любому пути S , соединяющему поверхности полюсов $\Gamma(C)$ и $\Gamma(-C)$. Интеграл (6) определяет ампер-витки, необходимые для создания поля в зазоре между контурами $\Gamma(C)$ и $\Gamma(-C)$. Контур полюса строится вблизи рабочей зоны, при удалении от которой переходит в магнитопровод стандартной формы (при этом «магнитные заряды» должны быть скрыты в железе).

Начиная с места перехода полюсного наконечника в магнитопровод (точки A и B) для обеспечения на поверхности железа условия $H_\tau = 0$ (τ — координата по касательной к контуру) необходимо размещать поверхностную токовую нагрузку, величина которой определяется производной $\partial\Phi/\partial\tau$.

Магнитная система с $\mu=\infty$, у которой необмотанная часть контура состоит из участков $\Phi = \text{const}$, а на остальной размещена поверхностная токовая нагрузка, определяемая величиной $\partial\Phi/\partial\tau$, эквивалентна системе «магнитных зарядов» с потенциалом Φ . Конечно, такая магнитная система представляет собой скорее некий идеальный объект, чем техническое устройство. Это относится прежде всего к размещению

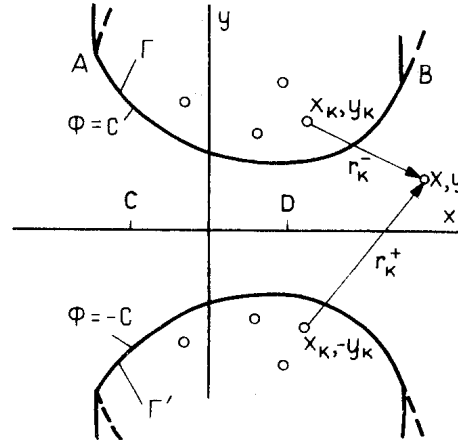


Рис. 3. «Магнитные заряды» и эквипотенциалы.

Табл. 1

k	x_k	y_k	q_k
1	-0,200	0,800	-206,20
2	-0,176	0,753	773,40
3	-0,153	0,707	-967,10
4	-0,130	0,660	266,90
5	-0,107	0,613	548,16
6	-0,074	0,574	-779,85
7	-0,037	0,537	496,03
8	0	0,500	-262,30

Табл. 2

x	e^{-x^2}	H_1	H_2	H_3
-2,0	0,0183	0,0154	0,1066	0,0994
-1,6	0,0773	0,0789	0,1600	0,1552
-1,0	0,3679	0,3681	0,3910	0,3900
-0,8	0,5273	0,5291	0,5362	0,5377
-0,6	0,6977	0,6972	0,6988	0,6986
-0,4	0,8521	0,8542	0,8546	0,8544
-0,2	0,9608	0,9616	0,9617	0,9617
0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,2	0,9608	0,9616	0,9617	0,9615
0,4	0,8521	0,8542	0,8543	0,8542
0,6	0,6977	0,6972	0,6982	0,6972
0,8	0,5273	0,5291	0,5350	0,5347
1,0	0,3679	0,3681	0,3880	0,3868
1,6	0,0773	0,0789	0,1535	0,1486
2,0	0,0183	0,0154	0,1021	0,0947

токовой нагрузки, которая реально не «размазывается» по поверхности, а сосредоточена в катушках, расположенных на магнитопроводе. Поэтому данный алгоритм завершается решением прямой задачи магнитостатики для магнитной системы, у которой профиль полюса совпадает с найденным, а токовая нагрузка определяется не касательной производной потенциала, а требованиями технологии.

В табл. 1, 2 и на рис. 4 представлены результаты аппроксимации системой «магнитных зарядов» функции $H_y(x, 0) = \exp(-x^2)$, заданной на отрезке $[-2, 2]$ ($N=15, M=101$). В табл. 1 даны координаты расположения зарядов и их величины, полученные в результате решения задачи (4') ($x_{N-k+1} = -x_k; y_{N-k+1} = y_k; q_{N-k+1} = q_k$). Величина функционала, достигнутая при минимизации (4'), составила $\Delta = 1,17 \cdot 10^{-4}$. Контуры полюсных наконечников показаны на рис. 4 кривыми 1...3, которым соответствуют значения потенциала $\Phi = 0,238; 0,198; 0,1$. Заряды располагались равномерно на кривой 4. Штриховой линией показан график функции $\exp(-x^2)$. В табл. 2 дано сравнение поля H_1 системы «магнитных зарядов» (или, что то же самое, идеальной магнитной системы) с полями H_2 и H_3 , создаваемыми магнитными системами, имеющими сосредоточенную обмотку (рис. 5, слева и справа соответственно). Величины H_2 и H_3 получены в результате решения прямой задачи методом интегральных уравнений [5]. В качестве полюсного наконечника выбирался контур, изображенный кривой 2 рис. 4.

Отметим, что магнитные системы, представленные на рис. 5, имеют разные коэффициенты рассеивания. Поэтому в табл. 2 даны относительные величины полей, нормированные к значению при $x=0$, следовательно, магнитные системы сравниваются при разных токах питания.

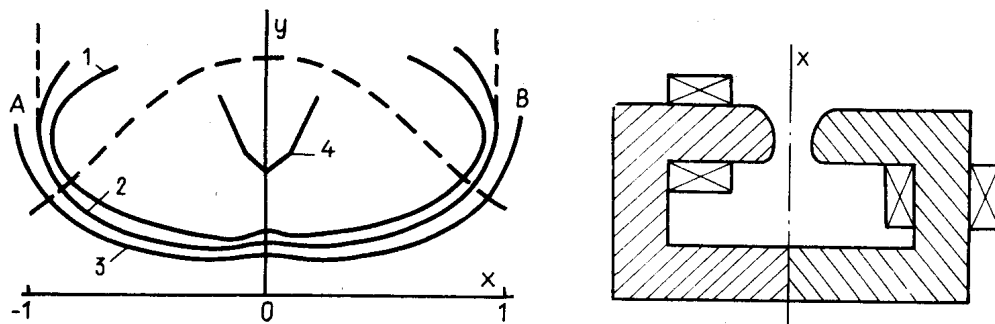


Рис. 4. Формы полюсов идеальной магнитной системы. $M=101; N=15; H_y(x, 0) = \exp(-x^2)$. Пояснения в тексте.

Рис. 5. Размещение катушек на магнитопроводе.

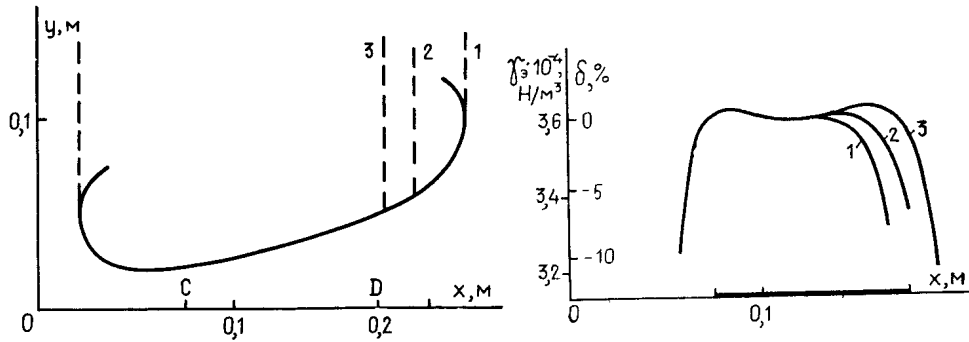


Рис. 6. Формы полюсов магнитожидкостного сепаратора (1...3). $\gamma_3=3,6 \cdot 10^4$ Н/м³; $M_1=M_2=100$; $N=15$.

Рис. 7. Распределение эффективного удельного веса по высоте рабочего участка. Кривые 1...3 соответствуют формам полюсных наконечников на рис. 6.

На участке $-1 < x < 1$ рассчитанное поле хорошо совпадает с заданным и практически не зависит от места расположения катушки на магнитопроводе. При $|x| > 1$ поле H_1 идеальной магнитной системы хорошо аппроксимирует заданное поле, однако совпадение с решениями H_2 , H_3 прямой задачи значительно хуже.

Как указано выше, в задачах магнитожидкостной сепарации часто требуется обеспечить на некотором участке оси постоянство эффективного удельного веса (3). Это приводит к требованиям к значениям как поля, так и его градиента. Вместо функционала (4') в этом случае следует минимизировать функционал

$$\min_q \left\{ \sum_{i=1}^{M_1} (H_y(x_i, 0) - f_i)^2 + \sum_{i=1}^{M_2} (G_x(x_i, 0) - g_i)^2 \right\}.$$

Здесь $G_x = \partial^2 \Phi / \partial y \partial x$; g_i — заданное значение градиента в точке $(x_i, 0)$.

На рис. 6, 7 представлены результаты расчета формы полюсов магнитожидкостного сепаратора для создания в его рабочем объеме области с эффективным удельным весом $\gamma_3 = 3,6 \cdot 10^4$ Н/м³ и распределением γ_3 по x . Число зарядов $N=15$, $M_1=M_2=100$; величина Δ , достигнутая при минимизации последнего функционала, равна $\Delta = 3,88 \cdot 10^{-8}$.

Легко видеть, что левый участок распределения $\gamma_3(x)$ расположен в области с минимальным воздушным зазором и, следовательно, максимальным магнитным полем. Феррожидкость намагничена здесь до насыщения $J=J_s = \text{const}$ и условие $\gamma_3 = \text{const}$ фактически сводится к требованию $G_x = \text{const}$. Правый конец рабочего участка соответствует малым полям, где зависимость $J=J(H)$ существенно нелинейна. Этим, на наш взгляд, объясняются большие отклонения γ_3 от постоянной на этом участке. Тем не менее, даже здесь это условие выполняется с точностью, достаточной для практических приложений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дворчик С. Е., Рыков В. Г., Семяшова Л. М., Янговский Е. И. Движение немагнитных тел в магнитоэлектрических и центробежных аппаратах с магнитной жидкостью // Магнит. гидродинамика. — 1979. — № 1. — С. 80... 88.
2. Дворчик С. Е. и др. Создать и освоить экспресс-анализатор плотности на магнитной жидкости // Отчет ЭНИИ им. Г. М. Кржижановского № 96. — М., 1986. — № Гос. регистрации 01850083516.
3. Лоусон А., Хенсон Р. Численное решение задач метода наименьших квадратов. — М.: Наука, 1986. — 229 с.
4. Сборник научных программ на Фортране // Руководство для программиста. Вып. 1. — М., 1974.
5. Тозони О. В., Маергойз И. Д. Расчет трехмерных электромагнитных полей. — Киев: Техника, 1974. — 352 с.

Поступила в редакцию 16.08.90 (11.07.90)