

УДК 537.84

Ю. Б. Колесников, В. А. Мирошников

МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИЙ МЕТОД ГЕНЕРАЦИИ УЕДИНЕННЫХ ВОЛН

Для генерации уединенных волн обычно используются два метода. Согласно первому [1, 2] волны образуются с помощью поршня, установленного вблизи торцевой стенки канала прямоугольного сечения. Поршень резко толкают в направлении, параллельном торцевой стенке. По второму методу [3, 4] используется тонкая перегородка, установленная в начальной части канала. По обеим сторонам перегородки создаются два различных уровня жидкости. Уединенные волны образуются при резком удалении перегородки. Резкие перемещения перегородки или поршня приводят к существенным возмущениям начального профиля поверхности жидкости. Представляет интерес метод, позволяющий существенно уменьшить эти возмущения. В настоящей работе предлагается именно такой метод, основанный на МГД эффектах в слабопроводящих средах.

Метод генерации. Формирование начального профиля свободной поверхности жидкости показано на рис. 1. Канал, изготовленный из плексигласа, имел прямоугольное сечение при ширине 30 мм, высоте 65 мм и длине $L_0 = 550$ мм. Два тонких плоских электрода, изготовленных из нержавеющей стали, были установлены на боковых стенках канала. Толщина электродов 0,5 мм, ширина 10 мм. В качестве рабочей жидкости использовали 30% водный раствор электролита КОН со следующими физическими свойствами: коэффициент кинематической вязкости $\nu = 2,1 \cdot 10^{-7}$ м²/с, плотность $\rho = 1,29 \cdot 10^{-3}$ кг/м³, удельная электропроводность $\sigma = 54,34$ Ом⁻¹ м⁻¹.

Канал устанавливался между полюсами магнита постоянного тока, создававшего однородное магнитное поле с индукцией B до 1,4 Тл. С помощью источника постоянного тока в области между электродами пропускался ток силой $I = 1 \dots 6$ А и плотностью j . Взаимодействие внешнего магнитного поля B с током j , текущим через жидкость, приводит к возникновению горизонтальной электромагнитной силы $j \times B$ (см. рис. 1). Под действием электромагнитной силы жидкость приходит в движение до тех пор, пока на свободной поверхности жидкости не устанавливается равновесие между электромагнитной силой и силой тяжести. Стационарный начальный профиль свободной поверхности жидкости показан на рис. 1.

Метод дает возможность изменять величину начального перепада уровней D (рис. 2), длину приподнятой части начального профиля L , а также создавать вихревую пару в области между торцевой стенкой и электродами. Изменение величины перепада D достигается варьированием силы тока, изменение длины L — перемещением электродов.

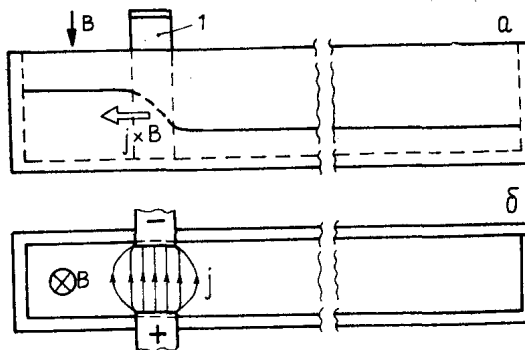


Рис. 1. К формированию начального профиля свободной поверхности жидкости МГД методом: вид сбоку (а) и сверху (б).

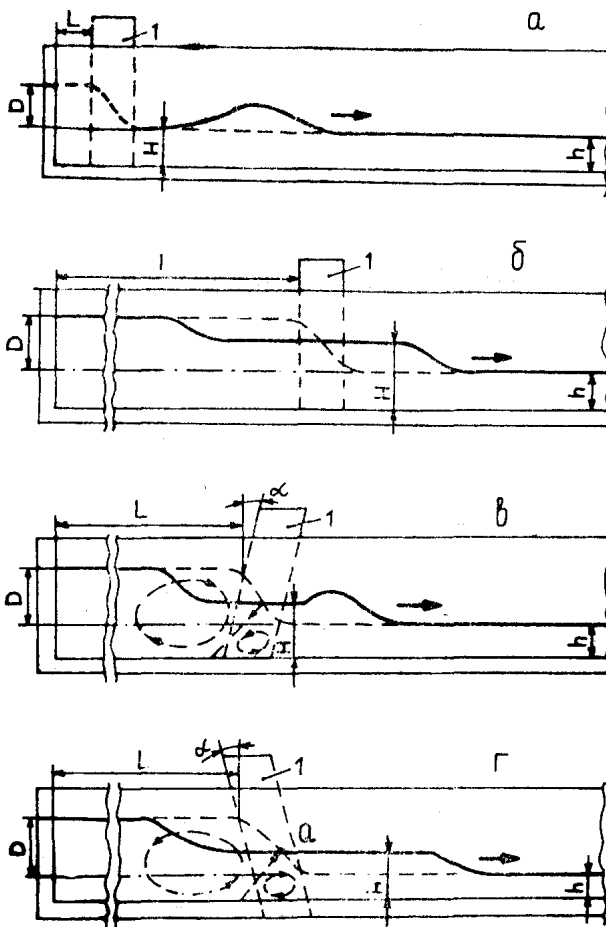


Рис. 2. К генерации уединенных волн солитона (а), КдВ бора (б), усеченного солитона (в) и усеченного сверху КдВ (г) МГД методом.

Сила тока и местоположение электродов не изменяют качественно форму стационарного начального профиля жидкости. При вертикальном расположении электродов вихревой пары не наблюдается (см. рис. 2а, б). При малом наклоне электродов ($\alpha = \pm 10^\circ$) образуется стационарная пара вихрей (см. рис. 2б, в). Образование вихрей обусловлено неоднородностью растекания тока, которая вызывает момент электромагнитной силы относительно горизонтальной оси. Направление вращения вихрей изменяется при изменении наклона электродов (см. рис. 2б, в). Угловая скорость вращения вихрей определяется силой тока. Наличие вихревой пары практически не изменяет форму

стационарного начального профиля поверхности жидкости.

Образование уединенной волны завершается после резкого выключения тока. Влияние МГД эффектов на распространение уединенной волны незначительно, так как электрическая проводимость используемой жидкости мала и $Na \ll 1$. Форма фронта уединенной волны может варьироваться перемещением и наклоном электрода, а также изменением силы тока.

Описанный метод генерации уединенных волн может быть использован для произвольной глубины жидкости. В настоящей работе он использовался для генерации уединенных волн на мелкой воде. Чтобы убедиться в соответствии экспериментальных условий условиям распространения волн на мелкой воде, на дно канала помещали мелкие частицы. При распространении уединенной волны частицы под фронтом волны приходили в движение. Наблюдения генерированных уединенных волн свидетельствовали о двухмерности их формы.

Совокупность экспериментальных условий тестировалась в процессе генерации солитона Кортевега—де Вриза (КдВ) [5, 6]. Принципиальная схема генерации солитона приведена на рис. 2а, а фотография распространяющегося солитона — на рис. 3а. Для создания солитона длина L выбиралась таким образом, чтобы объем жидкости в области генерации DL был соизмерим с объемом солитона. Начальный перепад уровней практически соответствовал амплитуде солитона A , равной 0,5 см. Глубина жидкости не превышала $0,25\lambda$, где λ — экспериментальная длина волны, и составляла около $4A$. Формирование солитона завершалось на расстоянии $l \leq 50A$. Уменьшение l примерно вдвое по сравнению с данными других авторов [1, 2] было обусловлено низким уровнем возмущений начального профиля жидкости. Форма уединенной волны оп-

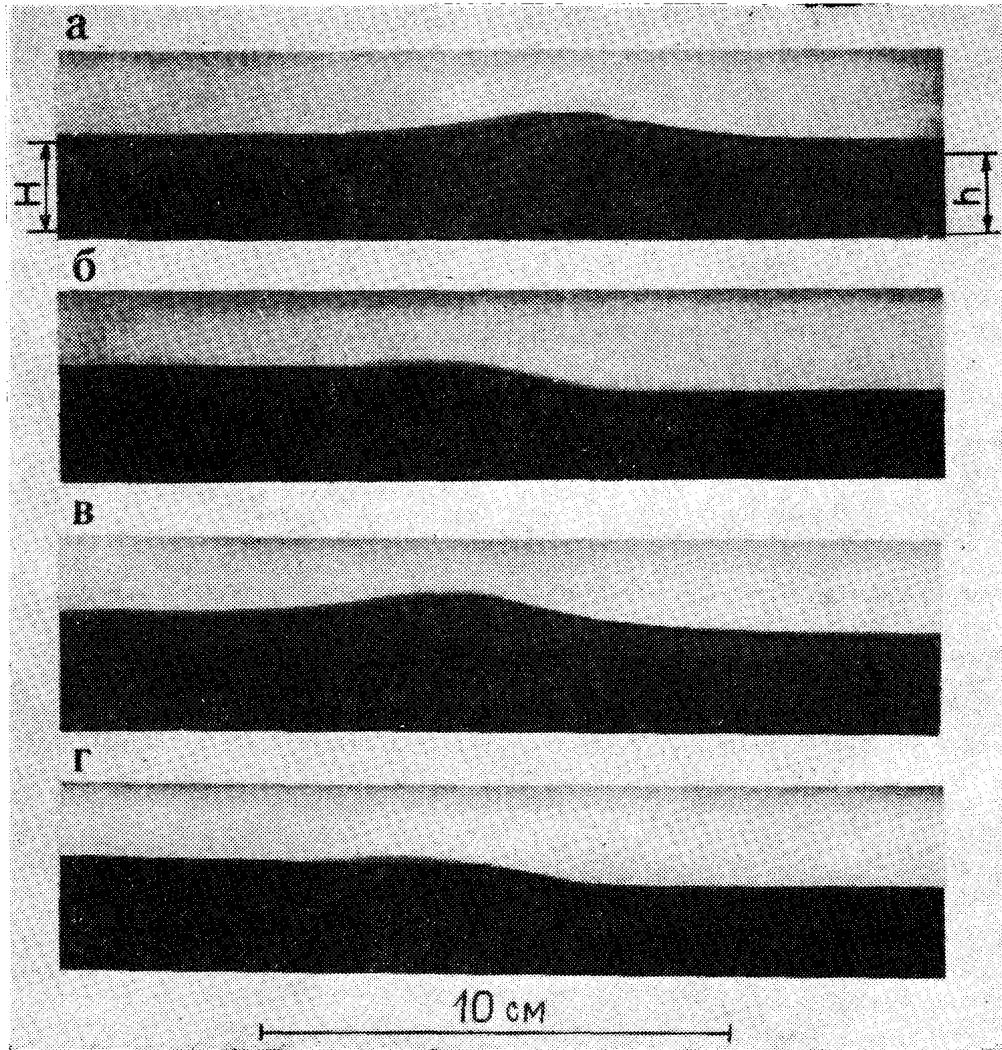


Рис. 3. Фотографии, иллюстрирующие форму распространяющихся уединенных волн: солитона, $h=H$ (а); КдВ бора, $h<H$ (б); усеченного солитона, $h<H$ (в) и усеченного сверху КдВ бора, $h<H$ (г).

ределялась с помощью описанной ниже процедуры обработки фотографий. Отклонение экспериментальной формы солитона от теоретической, описываемой квадратом секанса [см. далее (7)], не превышала погрешности эксперимента (рис. 4).

Принципиальная схема генерации бора по уравнению КдВ (КдВ бора) показана на рис. 2б, фотография распространяющегося бора — на рис. 3б. В процессе генерации бора длина L выбиралась таким образом, чтобы объем жидкости в области генерации $(D-H)L$ был соизмерим с объемом бора $H(L_0-L)$. Уровень D в 2,5...3 раза превышал амплитуду бора $A=H-h \approx 0,5-0,7$ см; при этом $h \approx 2,5A$. Уровень H поддерживался постоянным за счет запаса жидкости на уровне $D+h$. Описанная схема генерации подобна схеме генерации с перегородкой [3, 4], но, как и в случае солитона, длина формирования бора $l \leq 40A$ уменьшалась примерно вдвое по сравнению с [3, 4].

Возможность создания вихревой пары позволила генерировать боры с другой формой фронта. Схемы генерации этих боров приведены на рис. 2в, г, а их фотографии — на рис. 3в, г. В момент выключения тока вихревая пара создавала струю, которая в окрестности точки Q изменяла процесс перетекания жидкости с уровня $D+h$ на уровень H . После

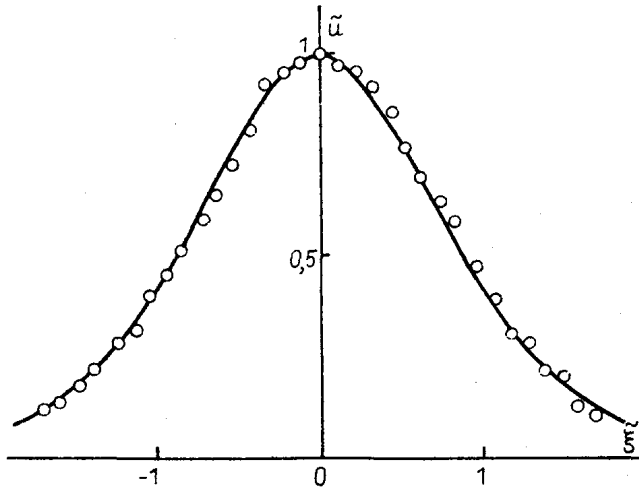


Рис. 4. Солитон в безразмерных координатах: (—) — теория (1); \circ — эксперимент. Солитон на расстоянии 27 см от электродов.

выключения тока вихри быстро диссипировали. Форма фронта боров зависела от направления вращения вихрей. Угловая скорость вращения вихрей была порядка 6 рад/с в случае рис. 2в, 3в и 10 рад/с в случае рис. 2г, 3г. Параметры L , D , h выбирались таким же образом, как и при генерации бора в случае рис. 2б, 3б. Длина формирования l не превышала 40А.

Теоретическая модель. Для представления полученных в эксперименте боров применялась теория уединенных волн КдВ в обобщенных функциях. Использовалось одно из решений [7], найденное в классе непрерывных функций с точкой разрыва $\xi = \xi_0$ первого рода:

$$u = \left(S - F^2 + 3F^2 \operatorname{sech}^2 \frac{F}{2} \xi_0 \right) \theta_- + \left(S - F^2 + 3F^2 \operatorname{sech}^2 \frac{F}{2} \xi \right) \theta_+. \quad (1)$$

Здесь u описывает форму волны; $\xi = x - St$ — автомодельная координата; параметрами S , F , ξ_0 определяются скорость, амплитуда и форма волны; θ_- , θ_+ — функции Хевисайда:

$$\theta_- = \begin{cases} 0 & \text{для } \xi > \xi_0; \\ 1 & \text{для } \xi \leq \xi_0; \end{cases} \quad \theta_+ = \begin{cases} 1 & \text{для } \xi \geq \xi_0; \\ 0 & \text{для } \xi < \xi_0. \end{cases}$$

Это решение удовлетворяет уравнению уединенных волн КдВ в обобщенном смысле:

$$\int_{-\infty}^{\infty} [-Su'(\xi) + u(\xi)u'(\xi) + u'''(\xi)] \varphi(\xi) d\xi = 0,$$

где основная функция $\varphi(\xi)$ принадлежит основному пространству бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем. Математический смысл решения (1) следующий: если форма генерированной волны описывается непрерывной функцией с точкой разрыва первого рода и в точке разрыва производных выполняются определенные соотношения, то такая волна будет распространяться без изменения формы.

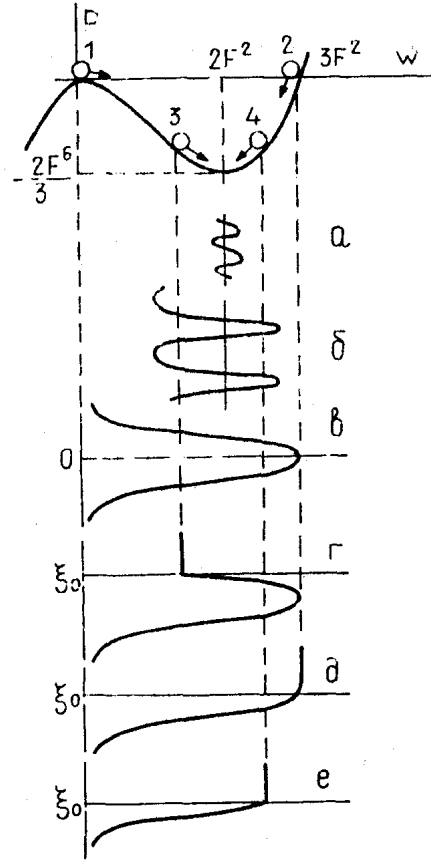
Рассмотрим физический смысл решения (1). Задача об уединенной волне КдВ в обычном смысле описывается обыкновенным дифференциальным уравнением [6]

$$-Su'(\xi) + u(\xi)u'(\xi) + u'''(\xi) = 0. \quad (2)$$

Преобразование $v(\xi) = u(\xi) - S$ позволяет исключить S из уравнения (2); таким образом, последующее рассмотрение справедливо для любой скорости волны:

$$v(\xi)v'(\xi) = -v'''(\xi). \quad (3)$$

Рис. 5. Потенциальная кривая и различные типы конечных консервативных движений системы в фазовом потенциальном поле (5): *a* — синусоидальная волна; *b* — кноидальная волна; *в* — солитон; *г* — усеченный солитон; *д* — КдВ бор; *е* — усеченный сверху КдВ бор.



Уравнение (3) демонстрирует причину постоянства формы уединенной волны, а именно, равновесие между нелинейностью и дисперсией. Интегрирование (3) и подстановка $w(\xi) - F^2$ вместо $v(\xi)$

$$\frac{d^2 w}{d\xi^2} = wF^2 - \frac{w^2}{2}; \quad (4)$$

$$\frac{d^2 q}{d\tau^2} = -\frac{1}{\mu} \frac{dP}{dq}$$

показывают, что исходная задача (2) сводится к задаче о консервативном движении системы с одной степенью свободы в потенциальном поле P линейной и квадратичной сил [8]. Величина w соответствует обобщенной координате q , а ξ — времени τ . Следующее интегрирование (4) дает закон сохранения энергии E :

$$\frac{w'^2}{2} + P(w) = E; \quad P(w) = -\frac{F^2}{2} w^2 + \frac{1}{6} w^3. \quad (5)$$

На рис. 5 представлен график потенциальной энергии. Следует указать, что при интегрировании (3) константу $F^4/2$ необходимо выбрать положительной. В противном случае кривая потенциальной энергии не будет иметь точек равновесия, и конечные движения в таком потенциальном поле будут невозможны. Характерная для многих физических задач асимметрия потенциальной ямы является результатом взаимодействия между «отталкивающим» кубическим и «притягивающим» квадратичным потенциалами.

Если энергия системы, которая находится вблизи дна потенциальной ямы $w = 2F^2$, незначительно отличается от потенциальной энергии в этой точке $P(2F^2) = -2F^6/3$, то система будет совершать малые симметричные гармонические колебания $W = w - 2F^2$ (см. рис. 5а), так как потенциальная кривая

$$P(w) = -F^2(2F^2 + W)^2 + (2F^2 + W)^3/6$$

при $W \rightarrow 0$ стремится к параболе:

$$P(w) |_{w \rightarrow 0} = -2F^6/3 + F^2 W^2/2. \quad (6)$$

С ростом энергии системы колебания в плоскости ξ , W становятся асимметричными, кноидальными (см. рис. 5б). Потенциальная энергия (5) задачи КдВ (2) отличается от потенциальной энергии (6) любой линейной задачи наличием следующего (кубического) члена в разложении потенциальной энергии в ряд Тейлора. Благодаря этому факту можно объяснить обширную область применимости уравнения КдВ, так как оно обычно является результатом асимптотических разложений исходных нелинейных уравнений.

Поиск уединенных волн физически означает поиск конечных аperiодических движений системы. Такой тип движений возникает в случае, если система приобретает энергию $E = E_{\max}$, равную потенциальной энергии $P = 0$ в точке локального максимума $\omega = 0$. Тогда интегрирование закона сохранения энергии (5) сводится к табличным интегралам, и получается часто цитируемое выражение для КдВ солитона [9]:

$$\omega = u - S + F^2 = 3F^2 \operatorname{sech}^2 \frac{F}{2} \xi. \quad (7)$$

КдВ солитон образуется на плоскости ξ, ω (см. рис. 5в) в случае, когда система начинает двигаться из локального максимума $\omega = 0$ (точка 1) в момент $\xi = \xi_0 = -\infty$. Затем она поднимается до точки 2 ($\omega = 3F^2$) при $\xi = 0$ и возвращается в точку 1 при $\xi = \infty$. Каким образом система может начать движение из точки 1, если ее начальная скорость равна нулю в соответствии с (5) $d\omega/d\xi = 0$. Ответ следующий. Потенциальная энергия представляет собой поверхность в фазовом пространстве (P, ξ, ω) , т. е. $P = P(\xi, \omega)$. Для простоты на рис. 5 показано только поперечное сечение этой поверхности при произвольном ξ . Система начинает двигаться вдоль оси ξ . В этом случае начальная скорость в направлении ξ , $d\xi/d\omega$, будет бесконечной, что позволяет системе сдвинуться с локального максимума. Естественно, что в любой момент, отличный от начального, величина $d\xi/d\omega$ конечна.

В зависимости от начальной координаты и скорости можно указать три возможных типа движений системы в потенциальной яме с энергией E_{\max} [10]. Если система начинает движение при $\xi = \xi_0$ из точки 3 (см. рис. 5) и начальная скорость направлена от локального максимума, то проекция движения на плоскость (ξ, ω) (см. рис. 5г) будет представлять собой прямую линию $\omega = \omega(\xi_0)$ при $\xi < \xi_0$, которая переходит в кривую, описывающую большую часть КдВ солитона при $\xi > \xi_0$. Такую уединенную волну можно назвать усеченным солитоном. Если система начинает двигаться при $\xi = \xi_0$ из точки 2 ($\omega = 3F^2$), то проекция движения (см. рис. 5д) будет прямой линией $\omega = \omega(\xi_0)$ при $\xi < \xi_0$, которая гладко переходит в половину солитона при $\xi > \xi_0$. Такая кинко-подобная уединенная волна может быть названа КдВ бором. Если система начинает движение при $\xi = \xi_0$ из точки 4 и начальная скорость направлена от локального максимума, то проекция движения (см. рис. 5е) будет линией $\omega = \omega(\xi_0)$ при $\xi < \xi_0$, которая переходит в кривую, описывающую меньшую часть КдВ солитона при $\xi > \xi_0$. Такую уединенную волну можно назвать усеченным сверху КдВ бором.

Таким образом, физический смысл решения (1) связан с консервативным движением системы с энергией $E = E_{\max}$ в фазовом потенциальном поле (5). Если в начальный момент времени $\xi = \xi_0$ система, которая находится на потенциальной кривой в точке $\omega_0 = \omega(\xi_0)$, приобретает скорость $(\omega')_0$ и ускорение $(\omega'')_0$, определяемое соотношениями (5) и (4) при $E = E_{\max}$

$$(\omega'')_0 = \omega_0 F^2 - \frac{\omega_0^2}{2}; \quad (\omega')_0 = \pm \left[2 \left(\frac{F^2}{2} \omega_0^2 - \frac{1}{6} \omega_0^3 \right) \right]^{1/2}, \quad (8)$$

то траектория ее движения в фазовом пространстве (P, ξ, ω) будет совпадать с траекторией солитона (7) при $\xi > \xi_0$. При $\xi < \xi_0$

$$\omega = \omega_0; \quad \omega'' = 0; \quad \omega' = 0.$$

Описанное движение системы соответствует решению (1), так как $u = \omega + S - F^2$ является непрерывной функцией, а конечные скачки производных совпадают со скачками в работе [7].

В эксперименте форма уединенных волн определялась с помощью обработки фотографий. Для контрастности изображения рабочая жидкость окрашивалась в черный цвет благодаря использованию высокодисперсного порошка активированного угля. Рис. 3 только иллюстри-

рует уединенные волны, полученные в эксперименте. Обработка фотографий проводилась после четырехкратного увеличения негатива. Размытость линии свободной поверхности жидкости в некоторых местах рис. 3 связана со смачиваемостью электролитом стенок канала. Ошибка в определении формы волны не превышала 10%. Экспериментальные точки наносились на график в безразмерных координатах $\tilde{u} = (u-h)/A$, $\tilde{\xi} = \alpha\xi/h$. Параметр α определялся методом наименьших квадратов с использованием безразмерной формы решения (1):

$$\tilde{u} = \tilde{u}_0 \theta_- + \operatorname{sech}^2 \tilde{\xi} \theta_+,$$

где $\tilde{u}_0 = (H-h)/A$. Сравнение экспериментальных данных с теоретической кривой (1) приведено на рис. 6, где $\tilde{u} = \tilde{u}_0$ в точке M . Постоянство длины волны сохранялось на расстояниях от 40 до 60 А. Эти расстояния на рис. 6...8 приведены в сантиметрах. Дальнейшие наблюдения за распространением волны были ограничены длиной канала. Экспериментальная и теоретическая формы волны совпадали в пределах ошибки эксперимента, включая точку разрыва производных M .

Образование точки разрыва производных связано с процессами, которые происходят намного быстрее, чем процесс распространения уединенной волны [11]. Теория [7] основывается на понятии дельта-функции, которая моделирует мгновенно протекающие процессы. В эксперименте после резкого выключения тока имели место быстротекущие процессы. Так, для КдВ бора в момент выключения тока нарушалось равновесие между электромагнитной силой и силой тяжести и на жидкость начинала действовать только сила тяжести. Таким образом, ускорение начального профиля свободной поверхности изменялось скачком от 0 до $g \sin \gamma$, где g — ускорение свободного падения, γ — угол наклона свободной поверхности. В этот момент скорость свободной поверхности оставалась постоянной и равной нулю.

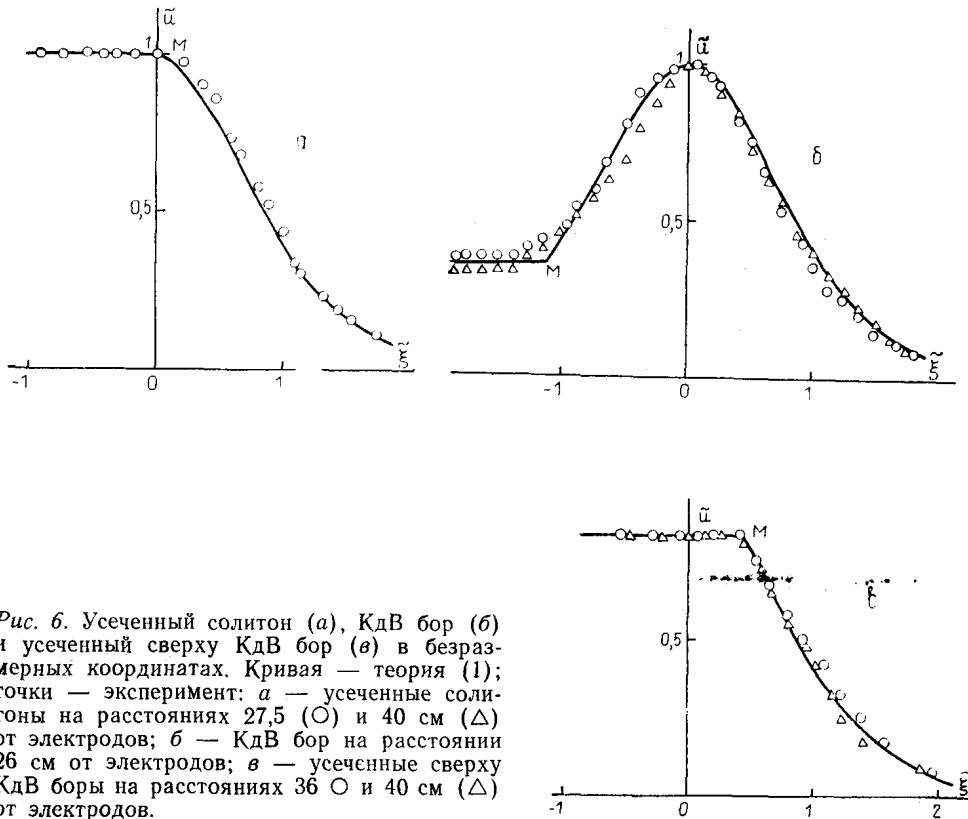


Рис. 6. Усеченный солитон (а), КдВ бор (б) и усеченный сверху КдВ бор (в) в безразмерных координатах. Кривая — теория (1); точки — эксперимент: а — усеченные солитоны на расстояниях 27,5 (О) и 40 см (Δ) от электродов; б — КдВ бор на расстоянии 26 см от электродов; в — усеченные сверху КдВ боры на расстояниях 36 О и 40 см (Δ) от электродов.

Описанная ситуация соответствует началу движения системы из точки 2 (см. рис. 5*д*), где $(\omega'')_0 \neq 0$ и $\omega_0 = 0$ в соответствии с (8). В эксперименте постоянство фазовой энергии E поддерживалось благодаря постоянному перепаду уровней D (см. рис. 2*б*). Потенциальная энергия силы тяжести превращалась в кинетическую энергию жидкости, протекающую с уровня $D+h$ на уровень H . Постоянство уровня H соответствовало в теории начальной координате движения системы $\omega_0 = \omega(\xi_0)$, которая является константой. Уровень H поддерживался постоянным экспериментально.

В случае усеченного солитона и усеченного сверху КдВ бора разрыв ускорения начального профиля $(\omega'')_0 \neq 0$ возникал аналогично случаю КдВ бора. Скорость свободной поверхности в окрестности точки Q (см. рис. 2*в, г*) также изменялась скачкообразно благодаря инерции вихревой пары, создающей струю, $(\omega')_0 \neq 0$. При переходе от генерации усеченного солитона к генерации усеченного сверху бора эта скорость изменяла свое направление на 180° , так как изменялось направление вращения вихрей. Изменение направления скорости соответствовало в теории изменению знака $(\omega')_0$ в уравнении (8). Угловая скорость вращения и ускорение свободного падения имеют конечную величину; поэтому скачки скорости $(\omega')_0$ и ускорения $(\omega'')_0$ системы также были конечны. Таким образом, быстро протекающие при резком выключении тока процессы позволили генерировать в эксперименте уединенные волны КдВ, соответствующие теоретическим с точкой разрыва первого рода.

Заключение. В работе предложен МГД метод генерации уединенных волн. По сравнению с известными методами он позволяет уменьшить генерационные возмущения и тем самым вдвое сократить длину формирования уединенной волны. С использованием этого метода были генерированы новые уединенные волны КдВ, усеченный солитон, КдВ бор, усеченный сверху КдВ бор. Механизм их генерации обсужден с использованием модели консервативного движения системы в фазовом потенциальном поле.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Segur H., Hammack J. L. Soliton models of long internal waves // J. Fluid Mech. — 1982. — Vol. 118. — P. 285... 304.
2. Абловиц Н., Сигур Х. Солитоны и метод обратной задачи. — М.: Мир, 1987. — 480 с.
3. Kao T. W., Pan F.-S., Renouard D. Internal solitons on the pycnocline: generation, propagation, and shoaling and breaking over a slope // J. Fluid Mech. — 1985. — Vol. 159. — P. 19... 53.
4. Yen H. H., Mok K.-M. On turbulence in bores // Phys. Fluids. — 1990. — Vol. 2, N 5. — P. 821... 828.
5. Тодд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. Солитоны и нелинейные уравнения. — М.: Мир, 1988. — 494 с.
6. Лэмб Дж. Введение в теорию солитонов. — М.: Мир, 1983. — 317 с.
7. Miroshnikov V. A. Propagation theory of nonlinear solitary waves of the generalized KdV equation // Abstr. Intern. Work.: Waves and vortices in the ocean and their laboratory analogues. — Vladivostok, 1991 (в печати).
8. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика. — М.: Наука, 1965. — 203 с.
9. Тодд М. Теория нелинейных решеток. — М.: Мир, 1984. — 262 с.
10. Kolesnikov Yu. B., Miroshnikov V. A. The completeness of the KdV bore system // Abstr. Intern. Work.: Anisotropy of fluid flows in external forces fields and geophysical, technological, ecological applications. — Jurmala, 1990. — P. 32.
11. Кеч В., Теодореску П. Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике. — М.: Мир, 1978. — 518 С.