

*В. Бояревич*

**КОНВЕКТИВНОЕ ТЕЧЕНИЕ И ЕГО УСТОЙЧИВОСТЬ В ГОРИЗОНТАЛЬНОМ КАНАЛЕ ПРЯМОУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ В ПРОИЗВОЛЬНО НАПРАВЛЕННОМ ПОПЕРЕЧНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ\***

*V. Bøjarevičs*

*Institute of Physics, Latvian Academy of Sciences, Salaaspils-1, LV-2169, Latvia  
(in present time: University of Greenwich, School of Mathematics, Wellington Str., London SE, UK)*

**BUOYANCY DRIVEN FLOW AND ITS STABILITY IN A HORIZONTAL RECTANGULAR CHANNEL WITH AN ARBITRARY ORIENTED TRANSVERSAL MAGNETIC FIELD**

An MHD flow is considered which is relevant to horizontal Bridgman technique for crystal growth from a melt. In the unidirectional parallel flow approximation an analytical solution is found accounting for the finite rectangular cross-section of the channel in the case of vertical magnetic field. Numerical pseudospectral solutions are used in the cases of arbitrary magnetic field and gravity vectors orientations. The vertical magnetic field (parallel to the gravity) is found to be the most effective to damp the flow, however, complicated flow profiles with "overvelocities" in the corners are typical in the case of finite cross-section channel. The temperature distribution is shown to be dependent on the flow profile. The linear stability of the flow is investigated by use of Chebyshev pseudospectral method. For the case of infinite width channel the transversal rolls instability is investigated, and for the finite cross-section channel the longitudinal rolls instability is considered. The critical Gr number values are computed in the dependence of the Ha number and the wave number or the aspect ratio in the case of finite section.

**Введение.** Появившийся в последнее время интерес к МГД течениям в горизонтальных каналах объясняется их присутствием в горизонтальном процессе Бриджмена для выращивания полупроводниковых кристаллов из расплава [1, 2]. Особенность этих течений – их образование под действием вихревой силы плавучести в результате почти однородного горизонтального градиента температуры. При этом поперечное магнитное поле создает дополнительную вихревую силу в жидкости, которая, в общем, подавляет начальное течение и увеличивает его устойчивость. Однако профиль скорости в канале конечного поперечного сечения существенно изменяется в присутствии электромагнитной вихревой силы, что приводит к сильно выраженным сдвиговым течениям, максимум скорости которых расположен вне центрального ядра течения. При умеренных числах Гартмана устойчивость таких течений может иметь практическое значение при выращивании кристаллов из расплава.

**Постановка задачи.** Длинный горизонтальный канал нагревается на одном конце и охлаждается на противоположном (координата  $x$ ). Вектор гравитации  $\mathbf{g} = g_y \mathbf{e}_y + g_z \mathbf{e}_z$  может быть направлен произвольно в поперечной плоскости  $(y, z)$ , что позволяет моделировать наклон канала, например, диагонально, вертикально. Горизонтальная полость прямоугольного сечения предполагается достаточно длинной, что оправдывает приближение однонаправленного течения вдали от торцевых стенок. Однако в отличие от многих предыдущих исследований подобных

\* Пер. с англ. автора.

конвективных течений (монография [3] содержит исчерпывающий список литературы) в нашем случае для канала конечной ширины сохраняется зависимость от поперечной координаты  $y$  в дополнение к вертикальной координате  $z$ .

Определяющие уравнения можно выразить в безразмерной форме с помощью следующих характерных величин: глубины канала  $h$  для координат;  $V_0 = v/h$  – для скорости ( $v$  – кинематическая вязкость);  $h/V_0$  – для времени;  $\rho V_0^2$  – для давления ( $\rho$  – плотность жидкости);  $T_0 = \Delta T h/l$  – для температуры (однородный градиент вдоль длины  $l$  емкости), для магнитного поля – величина внешнего однородного поля  $B_0$ . Тогда число Рейнольдса  $Re = V_0 h/\nu = 1$ ; число Грасгофа  $Gr = \beta g(\Delta T/l)h^4/\nu^2$  ( $\beta$  – коэффициент теплового расширения,  $g$  – гравитационная постоянная); число Гартмана  $Ha = B_0 h(\sigma/\rho\nu)^{1/2}$ ; числа Пекле и Прандтля  $Pe = Re \cdot Pr = v/\alpha$  ( $\alpha$  – коэффициент тепловой диффузии) и магнитное число Рейнольдса  $Rm = \nu\mu\sigma$  ( $\sigma$  – электропроводность,  $\mu$  – магнитная проницаемость). Приближение параллельного основного течения означает, что скорость можно представить как  $\mathbf{V} = U(y, z)\mathbf{e}_x + \mathbf{v}(t, x, y, z)$ ,  $\mathbf{v} = \{u, v, w\}$ , где  $\mathbf{v}$  – зависящее от времени возмущение скорости в декартовых координатах, которое рассматривается при анализе устойчивости. Аналогично безразмерное температурное поле можно записать в виде  $T = x + T_1(y, z) + \Theta(t, x, y, z)$ . Поскольку характерное число  $Rm$  мало, то безразмерное магнитное поле можно представить членами до первого порядка в разложении по  $Rm$ :  $\mathbf{B} = B_{0z}\mathbf{e}_z + B_{0y}\mathbf{e}_y + Rm(B_{1x}(y, z) \times \mathbf{e}_x + \mathbf{b}(t, x, y, z))$ .

Подставив эти представления в МГД уравнения, мы получим для стационарных переменных следующую задачу:

$$\Delta U + Ha^2(B_{0y}\partial_y B_{1x} + B_{0z}\partial_z B_{1x}) = Gr(g_z z + g_y y); \quad (1)$$

$$\Delta B_{1x} + B_{0y}\partial_y U + B_{0z}\partial_z U = 0; \quad PeU = \Delta T_1, \quad (2), (3)$$

где  $\Delta = \partial_{yy} + \partial_{zz}$ .

Уравнение (1) получено интегрированием  $y$ - и  $z$ -составляющих уравнений переноса количества движения соответственно по аргументам  $z$  и  $y$ . Отметим также, что электрический ток, индуцируемый движением, может быть выражен согласно  $\text{rot}\mathbf{B} = \mathbf{j}$ , следовательно, безразмерные составляющие стационарного электрического тока задаются в виде

$$j_y = \partial_z B_{1x}, \quad j_z = -\partial_y B_{1x}, \quad (4)$$

а линии электрического тока  $B_{1x} = \text{const}$ .

Соответствующими граничными условиями на стенках  $z = \pm 1/2$  и  $y = \pm y_0$  являются условия прилипания для скорости (5), для теплоизолированных стенок (6):

$$U = 0; \quad \partial_n T = 0, \quad (5), (6)$$

и для электронепроводящих стенок нормальная составляющая тока обращается в нуль, что, согласно (4), означает:

$$B_{1x} = \text{const}_0 = 0. \quad (7)$$

**Решения стационарной задачи.** В некоторых случаях с особой симметрией возможно построение аналитических решений, а именно, если вектор гравитации направлен по вертикальной оси канала,  $g_y = 0$ . Наиболее простым является немагнитный случай с  $Ha = 0$ , но для канала конечной ширины. Решение уравнений (1), (5) имеет вид

$$U = \text{Gr} \left( z^3/6 - z/24 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ch } ky \cdot \sin kz \right), \quad (8)$$

где  $k = 2\pi n$ ,  $a_n = (-1)^{n+1}/(4\pi^3 n^3 \text{ch } ky_0)$ . Отметим, что в центральной части канала ( $y \rightarrow 0$ ) ряд (8) сходится экспоненциально к кубическому профилю, наблюдаемому в течении в бесконечно широком канале [3], а на стенках ( $y \rightarrow \pm y_0$ ) сходимость ряда пропорциональна  $n^{-3}$ .

В случае вертикального вектора гравитации и вертикального магнитного поля ( $B_y = 0$ ) решение (1), (2), (5), (7) также можно выразить в аналитической форме:

$$U = \text{Gr} \text{Ha}^{-2} (\text{sh}(\text{Ha}z) / (2\text{sh}(\text{Ha}/2)) - z) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \text{Ha} (a_n \text{sh}(\lambda y) \cdot \sin ly - b_n \text{ch}(\lambda y) \cdot \cos ly) \sin kz + (c_n \kappa^{-1} (\mu^2 - \kappa^2) \text{sh}(\kappa z) + d_n \chi^{-1} (\mu^2 - \chi^2) \text{sh}(\chi z)) \cos \mu y \right], \quad (9)$$

где

$$k = 2\pi n, \quad l = \left( k/2 \left( \sqrt{k^2 + \text{Ha}^2} - k \right) \right)^{1/2}; \quad \lambda = k\text{Ha}/(2l), \quad \mu = \pi y_0^{-1} (n - 1/2), \\ \kappa = \left( \frac{1}{2} \text{Ha}^2 + \mu^2 - \text{Ha} \sqrt{\frac{1}{4} \text{Ha}^2 + \mu^2} \right)^{1/2}; \quad \chi = \left( \frac{1}{2} \text{Ha}^2 + \mu^2 - \text{Ha} \sqrt{\frac{1}{4} \text{Ha}^2 + \mu^2} \right)^{1/2};$$

выражения для  $a_n$ ,  $b_n$ ,  $c_n$ ,  $d_n$ , определяемые граничными условиями, опущены ввиду их громоздкости.

Для решения уравнения (9) характерны следующие свойства. Немagnetное решение (8) получается при  $\text{Ha} \rightarrow 0$ . В противоположном асимптотическом пределе при  $\text{Ha} \rightarrow \infty$  поведение решения является типичным как для гартмановских слоев малой толщины  $\Delta z \sim \text{Ha}^{-1}$  у стенок  $z = \pm 1/2$ , нормальных к магнитному полю, так и для сдвиговых слоев  $\Delta y \sim \text{Ha}^{-1/2}$  на стенках  $y = \pm y_0$  вдоль магнитного поля. Эти результаты можно получить, рассмотрев экспоненциальные члены в уравнении (9), где  $\chi$ ,  $\kappa \sim \text{Ha}$  и  $\lambda \sim \text{Ha}^{1/2}$ . Для случая  $\text{Ha} \rightarrow \infty$  можно установить также и поведение течения в ядре: поскольку коэффициенты  $a_n$ ,  $b_n$ ,  $c_n$ ,  $d_n$  убывают как  $e^{-\sqrt{\text{Ha}}}$ , решение в ядре не зависит от  $y$  [1, 2].

Решения (8) и (9) (совместно с соответствующими выражениями для  $V_{1x}$ ) используются как отправные и тестовые решения для более общих псевдоспектральных решений задачи (1) - (3), (5) - (7) для произвольно направленных магнитного и гравитационного полей в поперечной плоскости.

Для получения псевдоспектральных решений, во-первых, преобразуем координаты согласно  $\bar{y} = y/y_0$ ,  $\bar{z} = 2z$  с целью использования разложения по полиномам Чебышева  $T_n(x)$  на интервале  $[-1, 1]$ . (Для упрощения обозначений в дальнейшем черточки над новыми переменными опускаются.) Скорость  $U$  ищется в виде разложения по спектральным функциям, удовлетворяющим нулевым граничным условиям (5):

$$U(y, z) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N U_{mn} F_0(m, y) F_0(n, z), \quad (10)$$

где

$$F_0(k, x) = \begin{cases} T_{k+1}(x) - x; & k = 2, 4, \dots; \\ T_{k+1}(x) - 1; & k = 1, 3, \dots \end{cases} \quad (11)$$

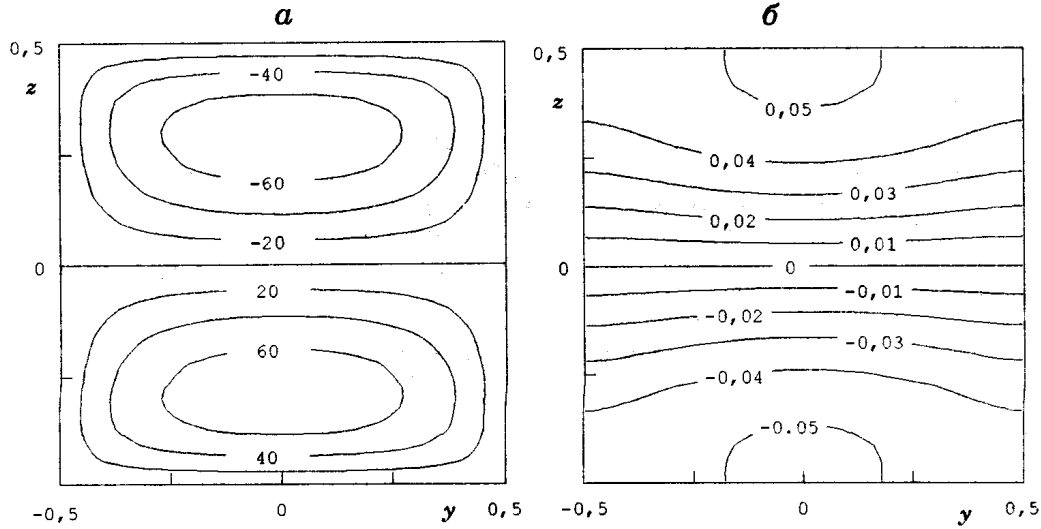


Рис. 1. Линии постоянных значений скорости (а) и температуры  $T_1$  (б).  $Gr = 10\,000$ ,  $Ha = 0$ ,  $g_z = 1$ .

Fig. 1. Constants velocity (a) and temperature  $T_1$  (б) lines.  $Gr = 10\,000$ ,  $Ha = 0$ ,  $g_z = 1$ .

Подобное разложение используется и для магнитного поля  $B_{1x}$ :

$$B_{1x}(y, z) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N B_{mn} F_0(m, y) F_0(n, z). \quad (12)$$

Температура

$$T_1(y, z) = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N T_{mn} F_1(m, y) F_1(n, z) \quad (13)$$

разлагается по спектральным функциям, удовлетворяющим условиям (6):

$$F_1(k, x) = \begin{cases} T_{k+2}(x) - (k+2)^2 / 4T_2(x); & k = 2, 4, \dots; \\ T_{k+2}(x) - (k+2)^2 T_1(x); & k = 1, 3, \dots \end{cases} \quad (14)$$

Вышеприведенные разложения подставляются в уравнения (1)–(3) и дискретизируются на решетке Гаусса–Чебышева (нули  $T_N(x)$ ) для одного и того же полного числа точек  $N = M = 24$  соответственно по направлениям  $z$  и  $y$ . Производные полиномов Чебышева вычислялись согласно рекомендациям в [4]. Полученная система алгебраических уравнений решалась численно с помощью программы DGENV из пакета LAPACK. Для проверки результатов число точек (членов разложения) варьировалось и согласно аналитическим решениям (8), (9) наблюдалось хорошее совпадение.

Решения, вычисленные при  $Gr=10\,000$ ,  $Re=0,01$ , представлены графически. Как показывают вычисленные линии постоянных значений скорости (рис. 1а) в квадратном канале для немагнитного случая (соответствующего решению (8)), течение является симметричным по направлению  $y$  и антисимметричным – по  $z$ . Относительно малая область центрального потока соответствует предыдущим  $y$ -независимым решениям [3, 5, 6]. Течение в конечном канале возмущает стационарное распределение температуры по сечению канала (рис. 1б).

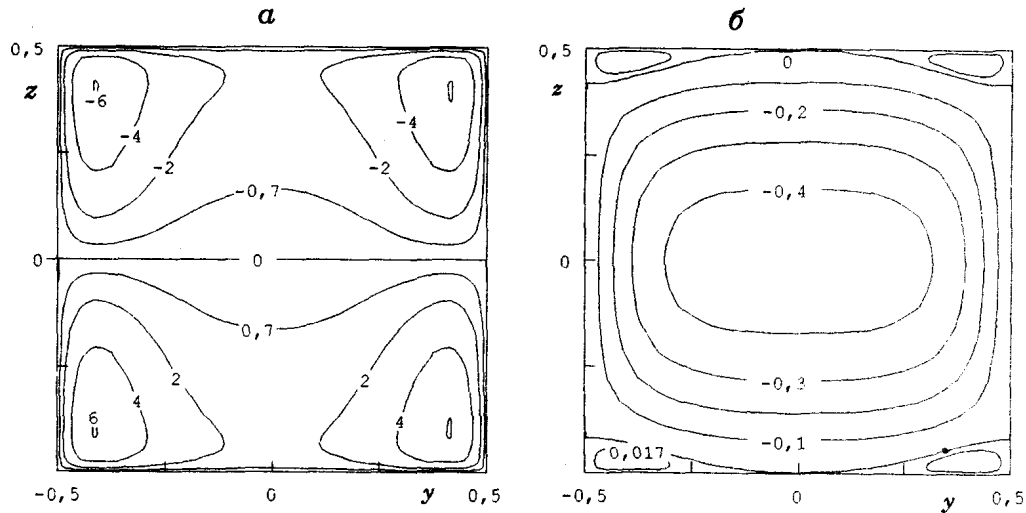


Рис. 2. Линии постоянных значений скорости (а) и электрического тока (б).  $Gr = 10\,000$ ,  $Ha = 50$ ,  $g_z = 1$ .

Fig. 2. Constants velocity (a) and electric current (б) lines.  $Gr = 10\,000$ ,  $Ha = 50$ ,  $g_z = 1$ .

Профиль скорости в канале конечной ширины для магнитного случая  $Ha = 50$  (рис. 2а) существенно отличается от  $y$ -независимых решений в канале неограниченной ширины. Сдвиг максимумов скорости, очевидно, объясняется тем, что линии электрического тока направлены вдоль магнитного поля в области боковых стенок (рис. 2б) и благодаря этому там не происходит существенного торможения начального конвективного течения, но в то же время в области центрального потока наблюдается сильное подавление скорости и  $y$ -независимое течение соответствует решениям в [1, 8]. В случае более широкого канала угловые струйные потоки начинают образовываться даже при меньших числах  $Ha$ , например при  $y_0 = 1,5$ , начиная с  $Ha = 5$ . Изменения в профиле скорости влияют также и на распределение температуры в сечении канала – более нагретые области сдвинуты к углам (рис. 3) по сравнению с немагнитным случаем (рис. 2), где верхняя стенка наиболее нагрета в центре.

Влияние горизонтального магнитного поля  $B_{cy}$  намного меньше влияния вертикального поля (рис. 4 и 2а). В случае горизонтального поля подавление течения в ядре значительно меньше, пропорционально

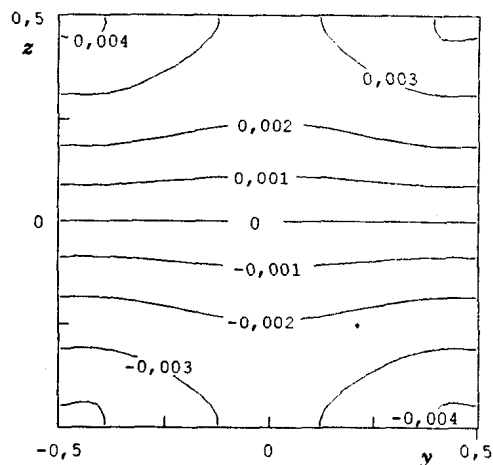


Рис. 3. Линии температуры  $T_1$ .  $Gr = 10\,000$ ,  $Ha = 50$ ,  $B_z = 1$ ,  $g_z = 1$ .

Fig. 3. Temperature  $T_1$  lines.  $Gr = 10\,000$ ,  $Ha = 50$ ,  $B_z = 1$ ,  $g_z = 1$ .

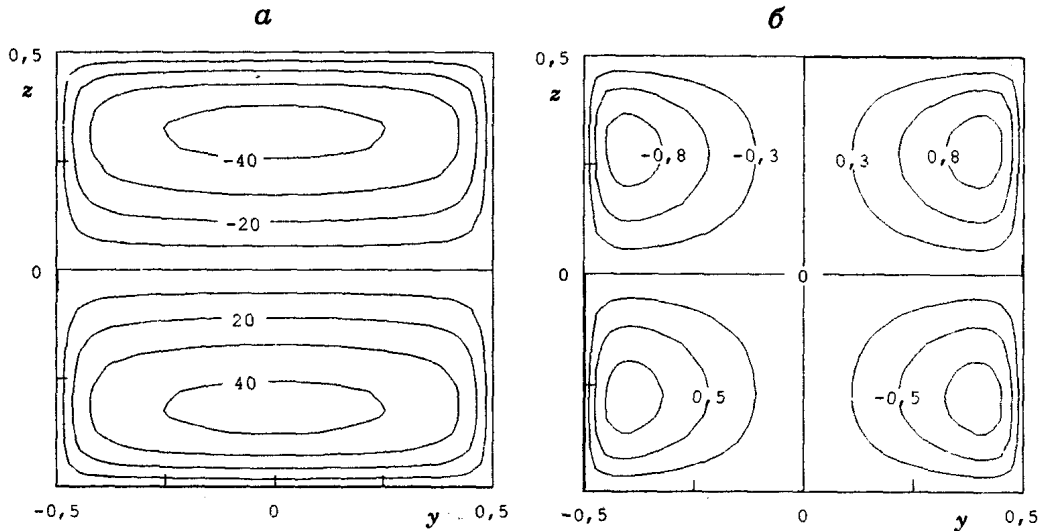


Рис. 4. Линии постоянных значений скорости (а) и электрического тока (б).  $Gr = 10\,000$ ,  $Na = 50$ ,  $B_y = 1$ ,  $g_z = 1$ .

Fig. 4. Constants velocity (a) and electric current (b) lines.  $Gr = 10\,000$ ,  $Na = 50$ ,  $B_y = 1$ ,  $g_z = 1$ .

$Na^{-1}$ , а не  $Na^{-2}$ , как видно из (9). Это можно объяснить видом индуцированного тока (рис. 4б), который в основном замыкается вдоль пристеночных слоев в случае горизонтального поля, в отличие от случая с вертикальным полем (рис. 2б). Течение в диагонально повернутом канале, где гравитация и магнитное поле параллельны и направлены вдоль диагонали, является чем-то средним (рис. 5). Эта ситуация может оказаться более близкой к практически важному случаю круглого сечения.

**Анализ устойчивости.** Устойчивость  $U(z)$  профиля в немагнитной ситуации в случае, когда боковые стенки отсутствуют, т. е.  $y_0 \rightarrow \infty$ , основательно изучена (см. [5–7] и другие ссылки в [3]). В работе [8] рассмотрена устойчивость электропроводящей жидкости в присутствии магнитного поля для аналогичной ситуации вертикального потока между дифференциально нагретыми вертикальными стенками; ротор движущей силы плавучести идентичен случаю горизонтальной щели, поэтому профиль скорости остается тем же. Однако, поскольку профили температуры различаются, эти ситуации не являются полностью идентичными.

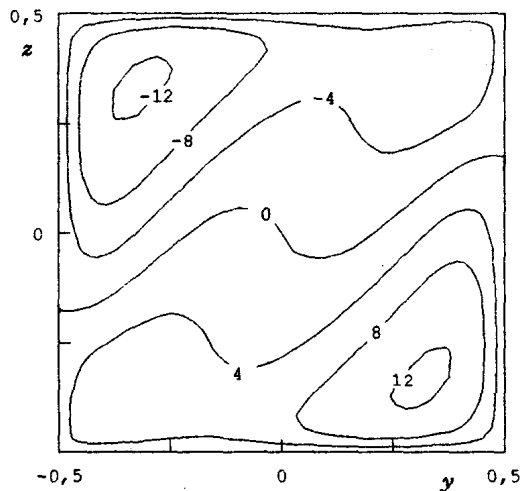


Рис. 5. Линии постоянных значений скорости.  $Gr = 10\,000$ ,  $Na = 50$ ,  $B_y = B_z = 71$ ,  $g_y = g_z = 0,71$ .

Fig. 5. Constants velocity lines.  $Gr = 10\,000$ ,  $Na = 50$ ,  $B_y = B_z = 71$ ,  $g_y = g_z = 0,71$ .

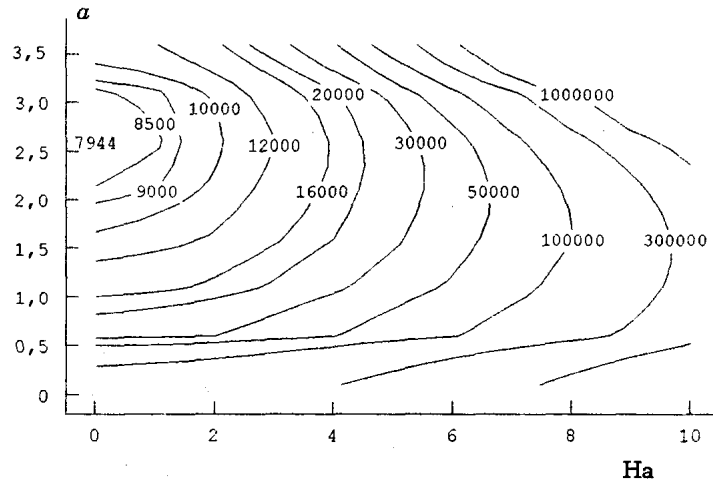


Рис. 6. Критические значения Gr для случая поперечных валов.

Fig. 6. Critical Gr values for transversal rolls.

При линейном анализе устойчивости параллельного течения возмущения для составляющих скорости, магнитного поля, электрического потенциала и температуры имеют вид

$$f = e^{\alpha t + i \alpha x} Y(y) Z(z). \quad (15)$$

Исследуются два случая возмущений:  $y$ -независимые поперечные валы при  $Y = 1$  и  $v$ -составляющей скорости, равной нулю;  $x$ -независимые продольные валы, когда  $a = 0$  в (15), все три составляющие скорости присутствуют и существует возможность учесть конечные размеры поперечного сечения канала.

*$y$ -Независимые поперечные валы.* В случае вертикального магнитного поля  $z$ -составляющая двойного ротора уравнений движения с учетом уравнения неразрывности приводит к уравнению

$$\omega(w'' - a^2 w) = i a [-U w'' + (U'' + a^2 U) w] + w'''' - (2a^2 + \text{Ha}^2) w'' + a^4 w \quad (16)$$

с граничными условиями  $w = w' = 0$  при  $z = \pm 1/2$ . После преобразования к интервалу  $[-1, 1]$   $w(z)$  выражается как

$$w(z) = \sum_{n=1}^N w_n F_{10}(n, z), \quad (17)$$

где спектральные функции, удовлетворяющие граничным условиям, имеют вид

$$F_{10}(n, z) = \begin{cases} T_{k+3}(z) - (k+2)(k+4)/8 T_3(z) + k(k+6)/8 T_1(z) & (k = 2, 4, \dots); \\ T_{k+3}(z) - (k+3)^2/4 T_2(z) + (k+1)(k+5)/4 T_0(z) & (k = 1, 3, \dots). \end{cases} \quad (18)$$

Уравнение (16) дискретизируется подобно стационарному случаю, однако в этой задаче точки решетки вида Гаусса-Лобатто (экстремумы  $T_{N-1}(z)$ ) позволяют избежать ложных собственных значений. В результате обобщенная алгебраическая задача на собственные значения решалась с помощью программы ZGEGV из пакета LAPACK.

Сходимость вычисленных критических собственных значений оказалась очень хорошей, так, в тестовом немагнитном случае при  $N = 16$ ;

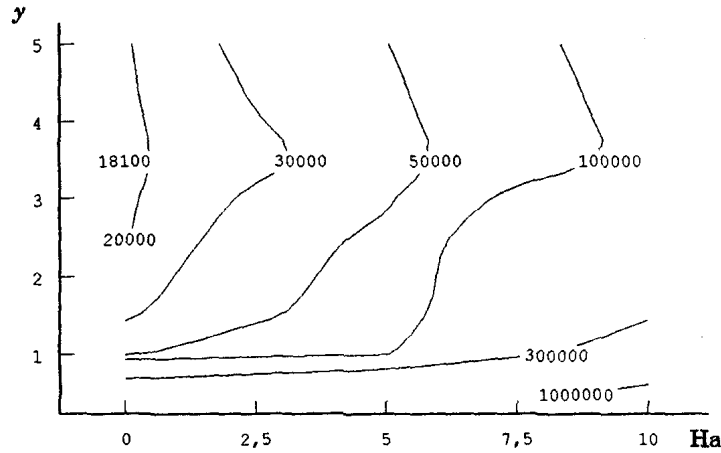


Рис. 7. Критические значения Gr для случая продольных валов.

Fig. 7. Critical Gr values for longitudinal rolls

32; 64; 128 вычисления дают одно и то же критическое число  $Gr = 7944$  для волнового числа  $a = 2,6$ . Влияние вертикального магнитного поля сводится к увеличению устойчивости, как это следует из рис. 6. Переход во всех случаях осуществляется к новому стационарному состоянию.

*x-Независимые продольные валы* в канале прямоугольного сечения в присутствии вертикального магнитного поля описываются системой уравнений устойчивости

$$\begin{aligned} \partial_x \Delta \psi &= \Delta^2 \psi - Ha^2 \partial_{xx} \psi - Gr \partial_y \Theta; \\ \partial_x u + \partial_x \psi \partial_y U - \partial_y \psi \partial_x U &= \Delta u + Ha^2 (-\partial_y \phi - u); \\ \partial_x \Theta + u + \partial_x \psi \partial_y T_1 - \partial_y \psi \partial_x T_1 &= Re^{-1} \Delta \Theta; \quad -\partial_x u = \Delta \phi, \end{aligned} \quad (19)$$

где  $\partial_x \psi = v$ ,  $\partial_y \psi = -w$ .

Граничными условиями на непроводящих стенках являются  $\psi = \partial_n \psi = u = \partial_n \Theta = \partial_n \phi = 0$ , которым можно удовлетворить, разлагая  $\psi$  по спектральным функциям (18),  $u$  – по (11),  $\phi$  и  $\Theta$  – по (14). Дискретизация системы (19) на решетке экстремумов приводит к вещественной обобщенной задаче на собственные значения, которая решалась с помощью программы DGEGV из LAPACK. Результаты при  $N=16$  приведены на рис. 7. Переход является надкритическим к осциллирующим валам при  $Re = 0,01$ , но при  $Re = 0,1$ , как показали вычисления, возможен переход к стационарным состояниям в случае канала квадратного сечения.

Согласно данным вычисления близость стенок в квадратном канале приводит к более устойчивому течению по сравнению с более широкими каналами; магнитное поле также является существенным стабилизирующим фактором.

Работа, описанная в данной публикации, оказалась возможной, отчасти, благодаря гранту № LBF000 Международного научного фонда (International Science Foundation).



## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Garandet J. P., Alboussiere T., Moreau R.* Buoyancy driven convection in a rectangular enclosure with a transverse magnetic field // *Int. J. Heat Mass Transfer.* – 1992. – Vol. 35, No. 4. – P. 741 – 748.
2. *Alboussiere T., Garandet J. P., Moreau R.* Buoyancy driven convection with an uniform magnetic field. Pt I. Asymptotic analysis ( $Ha \gg 1$ ) // *J. Fluid Mech.* – 1993.
3. *Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Непомнящий А. А.* Устойчивость конвективных течений. – М., 1989. – 320 с.
4. *Lee N. Y., Schultz W. W., Boyd J. P.* Stability of fluid in a rectangular enclosure by spectral method // *Int. J. Heat Mass Transfer.* – 1989. – Vol. 32, No. 3. – P. 513 – 520.
5. *Hart J.* A note on the stability of low-Prandtl number Hadley circulations // *J. Fluid Mech.* – 1983. – Vol. 132. – P. 271 – 281.
6. *Kuo H. P., Korpela S. A.* Stability and finite amplitude natural convection in a shallow cavity with insulated top and bottom and heated from a side // *Phys. Fluids.* – 1988. – Vol. 31, No. 1. – P. 33 – 42.
7. *Laure P., Roux B.* Synthesis of the results obtained by the stability analysis of the convective motions in a horizontal cavity of large extent // *C. R. Acad. Sci. Paris.* – 1987. – Vol. 305, II. – P. 1137 – 1143.
8. *Бирих Р. В., Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Рудакова Р. Н.* Об устойчивости конвективного течения проводящей жидкости в магнитном поле // *Магнит. гидродинамика.* – 1978. – № 1. – С. 30 – 36.

Поступила в редакцию 29.09.94