

УДК 537.84

Г. Д. Баранов, В. А. Бернштам, Г. В. Минеев,
Е. В. Поклонский, А. И. Элькин

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМЫ ЖИДКОМЕТАЛЛИЧЕСКИХ СТРУЙ С ТОКАМИ

Введение. В работе [1] рассмотрена специальная жидкометаллическая система, образованная рядом равномерно расположенных по окружности жидкометаллических струй, по которым протекают токи, имеющие в соседних струях противоположные направления (рис. 1). В результате взаимодействия токов с собственным полем возникают силы, вызывающие движение струй в радиальном направлении и их деформацию. Кроме того, возможны различного рода МГД-неустойчивости.

Эти факторы определяют предельное время существования системы струй в качестве работоспособной жидкой конструкции и, следовательно, максимальную длительность импульса источника электроэнергии.

1. Магнитное поле и оценка времени разлета струй в радиальном направлении. Будем полагать, что струи бесконечно протяженные, а их сечение неизменно по высоте. Задача для векторного потенциала магнитного поля в этом случае формулируется в виде

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial A}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A}{\partial \varphi^2} = -\mu_0 j, \quad (1)$$

$$j = \begin{cases} (-1)^{m+1} j_0, & (r, \varphi) \in G_m, \\ 0, & (r, \varphi) \in G_m, \quad m=1, 2, \dots, 2p. \end{cases}$$

Здесь j_0 — плотность тока в струе, G_m — сечение m -й струи, p — число пар струй.

Магнитное поле находится по формулам

$$B_r = \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial \varphi}, \quad B_\varphi = -\frac{\partial A}{\partial r}. \quad (2)$$

Если границы сечения струй совпадают с координатными линиями в цилиндрической системе координат (рис. 1), граничные условия запишутся в виде

$$\frac{\partial A}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=0} = A \Big|_{\varphi=\alpha} = A \Big|_{r=0} = 0, \quad A \Big|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow 0. \quad (3)$$

Решение уравнения (1) должно удовлетворять краевым условиям (3) и условиям непрерывности векторного потенциала и его производной.

В результате решения (1) с учетом (2) имеем для индукции магнитного поля:

$$B_r = \sum_n B_n r \sin k_n \varphi, \quad B_\varphi = \sum_n B_n \varphi \cos k_n \varphi,$$

$$B_n r = B_n \varphi = \frac{\mu_0 J_n}{2(k_n - 2)} [r_2 (r/r_2)^{k_n - 1} - r_1 (r/r_1)^{k_n - 1}], \quad 0 < r < r_1, \quad (4)$$

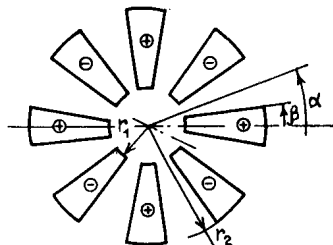


Рис. 1. Расчетная схема.

$$B_n^r = \mu_0 J_n \left[\frac{r_2}{2(k_n - 2)} (r/r_2)^{k_n - 1} + \frac{r_1}{2(k_n + 2)} (r_1/r)^{k_n + 1} - \frac{k_n r}{k_n^2 - 4} \right],$$

$$B_n^\varphi = \mu_0 J_n \left[\frac{r_2}{2(k_n - 2)} (r/r_2)^{k_n - 1} - \frac{r_1}{2(k_n + 2)} (r_1/r)^{k_n + 1} - \frac{2r}{k_n^2 - 4} \right],$$

$$r_1 < r < r_2,$$

$$B_n^r = -B_n^\varphi = -\frac{\mu_0 J_n}{2(k_n + 2)} [r_1 (r_1/r)^{k_n + 1} - r_2 (r_2/r)^{k_n + 1}], \quad r > r_2.$$

Здесь $J_n = (2j_0/\alpha k_n) \sin k_n \beta$, $\alpha = \pi/2p$, $\gamma = \beta/\alpha$ — коэффициент заполнения бланкета-магнита, $k_n = 2p(n + 1/2)$, $n = 0, 1, 2, \dots$

В случае струй произвольного сечения решение имеет вид [2]

$$A(M) = \frac{\mu_0}{2\pi} \int_G j(N) \ln \frac{1}{r_{MN}} dS_N. \quad (5)$$

Здесь G — область в плоскости xy , занятая струями; M — точка в этой плоскости.

Векторный потенциал системы токнесущих струй можно найти как суперпозицию векторных потенциалов отдельных струй. Полагая плотность тока постоянной и равной j_0 , для векторного потенциала одной струи запишем:

$$A(M) = \frac{\mu_0 j_0}{2\pi} \int_G \ln \frac{1}{r_{MN}} dS_N. \quad (6)$$

При помощи формулы Грина перейдем в выражении (6) к интегралу по контуру, охватывающему сечение G струи:

$$A(M) = \frac{\mu_0 j_0}{4\pi} \oint [(x_M - x_N) (\ln r_{MN} - 0,5) dy_N - (y_M - y_N) (\ln r_{MN} - 0,5) dx_N].$$

Представив контур, ограничивающий проводник, в виде замкнутой ломаной с координатами $N_i = (x_i, y_i)$ и вычислив интегралы по отрезкам прямых, получим окончательно для векторного потенциала и компонент индукции магнитного поля:

$$A(M) = \frac{\mu_0 j_0}{8\pi} \sum_i (K_i - 1) D_i, \quad B_x(M) = -\frac{\mu_0 j_0}{4\pi} \sum_i K_i \Delta x_i,$$

$$B_y(M) = -\frac{\mu_0 j_0}{4\pi} \sum_i K_i \Delta y_i.$$

Здесь

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i, \quad \Delta y_i = y_{i+1} - y_i, \quad \mathbf{r}_i = (\Delta x_i, \Delta y_i),$$

$$D_i = (x_M - x_i) \Delta y_i - (y_M - y_i) \Delta x_i, \quad \mathbf{R}_i = (x_i - x_M, y_i - y_M),$$

$$K_i = r_i^{-2} \left[(\mathbf{R}_{i+1}, \mathbf{r}_i) \ln R_{i+1}^2 - (\mathbf{R}_i, \mathbf{r}_i) \ln R_i^2 + 2D_i \left(\operatorname{arctg} \frac{(\mathbf{R}_{i+1}, \mathbf{r}_i)}{D_i} - \operatorname{arctg} \frac{(\mathbf{R}_i, \mathbf{r}_i)}{D_i} \right) - 2 \right].$$

На рис. 2а показана зависимость индукции магнитного поля от радиуса вдоль силовой линии, уходящей на бесконечность, рассчитанная по формуле (4) для случая радиально расположенных струй, и приведено сравнение случаев изогнутых (штриховая линия) и радиальных

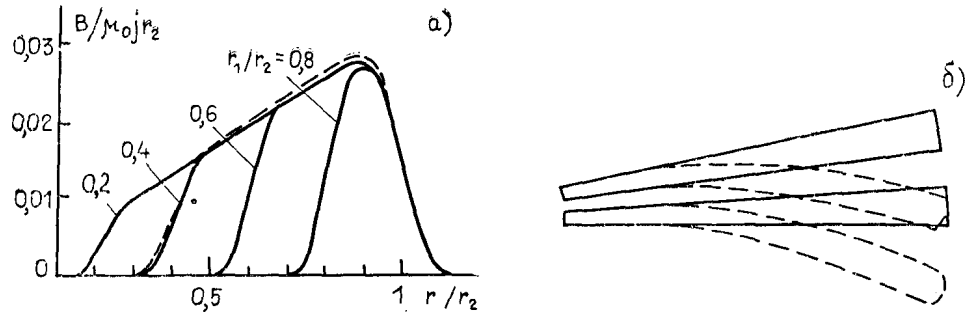


Рис. 2. Зависимость индукции магнитного поля от радиуса при различных r_1/r_2 и геометрии струй.

струй. Соответствующие геометрии приведены на рис. 2б. Характер распределения поля в обоих случаях одинаков. Распределение индукции не имеет минимума по радиусу.

Силу, приходящуюся на единицу высоты отдельной струи, найдем в виде

$$F_r = \int_G [\mathbf{j} \times \mathbf{B}] dS.$$

Воспользовавшись (4), получим:

$$F_r = -\mu_0 j_0^2 \sum_n \frac{2}{\alpha k_n} \sin k_n \beta \left\{ \frac{\sin(k_n - 1)\beta}{(k_n - 1)(k_n - 2)} \times \right. \\ \times \left[\frac{(1 - (r_1/r_2)^{k_n + 1})}{k_n + 1} - \frac{1 - (r_1/r_2)^3}{3} \right] + \\ \left. + \frac{\sin(k_n + 1)\beta}{(k_n + 1)(k_n + 2)} \left[\frac{1 - (r_1/r_2)^3}{3} - (r_1/r_2)^3 \frac{1 - (r_1/r_2)^{k_n - 1}}{k_n - 1} \right] \right\}.$$

Время смещения струи как целого на расстояние δ в радиальном направлении оценим по формуле

$$t_1 \approx \sqrt{\frac{2\delta\rho S}{F_r}}.$$

Для струй свинца с параметрами

$$r_1 = 0,5 \text{ м}; \quad r_2 = 1,5 \text{ м}; \quad \gamma = 0,5; \quad \rho = 24; \quad B_r = 1 \text{ Т}; \quad \delta = 1 \text{ см}$$

получим характерное время $t_1 \approx 20$ мс.

2. Решение для бесконечно протяженных в x - и y -направлениях струй. Для расчетной модели, показанной на рис. 3, рассмотрим устойчивость к возмущениям вида

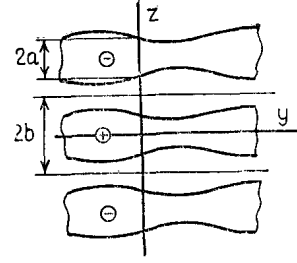
$$\xi = \dot{\xi}(z) \exp i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t), \quad (7)$$

где $\mathbf{k} = ik_x + jk_y$ — волновой вектор, ω — частота.

Случай $k_y = 0$ соответствует неустойчивостям типа перетяжек, а случай $k_x = 0$ — распаду каждой из токонесущих струй на отдельные струйки.

Для общности учтем и возможность неустойчивости из-за ускорений границы. Здесь и далее использован подход [3], причем допускается, что соблюдается условие $\mu_0 \sigma \Omega a^2 \ll 1$, где Ω — эквивалентная частота импульса тока, так что скин-эффект можно не учитывать и невозмущенные токи считать однородными.

Рис. 3. Схема расчета устойчивости токнесущих струй.



В общем случае возмущения, распространяющиеся на различных поверхностях струй, смещены по фазам друг относительно друга на различные углы. Мы ограничимся предельными случаями, когда сдвиг фаз возмущений на одной струе θ_1 составляет 0 или 180° и разность фаз возмущений θ_2 на обращенных друг к другу поверхностях имеет такие же значения. Всего получаются четыре варианта возмущений. Возмущения всех величин примем в виде (7), полагая их малыми по сравнению с невозмущенными величинами.

Уравнения для возмущения индукции магнитного поля в приближении, принятом в работе [4], запишем в виде

$$\frac{d^2 \dot{\mathbf{B}}_1}{dz^2} - k^2 \dot{\mathbf{B}}_1 = 0; \quad \mathbf{B}_1^e = \nabla \Psi_1, \quad \frac{d^2 \Psi_1}{dz^2} - k^2 \Psi_1 = 0. \quad (8), (9)$$

Уравнение (8) справедливо в жидком металле, уравнение (9) — вне жидкого металла.

Краевые условия для уравнений (8), (9) следуют из условий непрерывности магнитного поля при переходе границы жидкого металла

$$\dot{B}_{1x}(a) = \dot{B}_{1x}^e(a), \quad \dot{B}_{1y}(a) + \dot{\xi}_z(a) B_0/a = \dot{B}_{1y}^e(a), \quad \dot{B}_{1z}(a) = \dot{B}_{1z}^e(a)$$

и условий симметрии для соответствующих случаев:

$$\dot{B}_{1x}(0) = \dot{B}_{1y}(0) = \dot{B}_{1z}'(0) = 0, \quad (1, 2),$$

$$\dot{B}_{1x}'(0) = \dot{B}_{1y}'(0) = \dot{B}_{1z}(0) = 0, \quad (3, 4),$$

$$\dot{B}_{1x}^e(b) = \dot{B}_{1y}^e(b) = \dot{B}_{1z}^{e'}(b) = 0, \quad (2, 4),$$

$$\dot{B}_{1x}^{e'}(b) = \dot{B}_{1y}^{e'}(b) = \dot{B}_{1z}^e(b) = 0, \quad (1, 3),$$

где $B_0 = -\mu_0 j_0 a$. Здесь 1 соответствует $\theta_1 = 180^\circ$, $\theta_2 = 180^\circ$, 2 — $\theta_1 = 180^\circ$, $\theta_2 = 0$; 3 — $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = 180^\circ$; 4 — $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = 0$.

Граничные условия для Ψ_1 имеют вид

$$\dot{\Psi}_1(b) = 0, \quad (2, 4), \quad \dot{\Psi}_1'(b) = 0, \quad (1, 3).$$

Уравнения движения и неразрывности для возмущений запишем в виде

$$\begin{aligned} -\rho \omega^2 \dot{\xi}_x &= -ik_x \dot{p}_1 + \dot{F}_{1x}, & -\rho \omega^2 \dot{\xi}_y &= -ik_y \dot{p}_1 + \dot{F}_{1y}, \\ -\rho \omega^2 \dot{\xi}_z &= -\dot{p}_1' + \dot{F}_{1z}, & ik_x \dot{\xi}_x + ik_y \dot{\xi}_y + \dot{\xi}_z' &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Выражения для компонент возмущений электромагнитной силы имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{F}_{1x} &= \frac{B_0 z}{\mu_0 a} (ik_y \dot{B}_{1x} - ik_x \dot{B}_{1y}), & \dot{F}_{1y} &= \frac{B_0 \dot{B}_{1z}}{\mu_0 a}, \\ \dot{F}_{1z} &= \frac{B_0}{\mu_0 a} [z(ik_y \dot{B}_{1z} - \dot{B}_{1y}') - \dot{B}_{1y}]. \end{aligned}$$

Из системы (10) следует:

$$\dot{\xi}_z'' - k^2 \dot{\xi}_z = 0, \quad \rho \omega^2 = \frac{1}{\dot{\xi}_z'(a)} (k^2 \dot{p}_1(a) + ik \cdot \dot{\mathbf{F}}_1). \quad (11), (12)$$

Граничные условия уравнения (11) имеют вид

$$\dot{\xi}_z(a) = \dot{\xi}_z(-a), \quad \dot{\xi}_z'(a) = -\dot{\xi}_z'(-a). \quad (13), (14)$$

Условие (13) справедливо в отсутствие сдвига фаз на поверхности одной струи, а условие (14) — при сдвиге фаз на 180° .

Решения для соответствующих случаев запишем в виде

$$\dot{\xi}_z(z) = \dot{\xi}_z(a) \frac{\text{ch } kz}{\text{ch } ka}, \quad \dot{\xi}'_z(z) = \dot{\xi}'_z(a) \frac{\text{sh } kz}{\text{sh } ka}.$$

Выражение для возмущения давления на границе можно получить в форме

$$\dot{p}_1(a) = [\sigma_{\text{II}} k^2 - G(a) - F_0(a)] \dot{\xi}_z(a).$$

Здесь σ_{II} — коэффициент поверхностного натяжения,

$$G(a) = -\rho \frac{dv_{0z}}{dt}, \quad F_0(a) = -\frac{B_0^2}{\mu_0 a}.$$

Подставляя в формулу (12) найденные выражения для $\dot{p}_1(a)$, $\dot{\xi}'_z(a)$ и $F_1(a)$ и переходя к безразмерным величинам, получим дисперсионные уравнения для различных видов возмущений

$$\omega_*^2 = \text{th } k_* \left[\left(\frac{k_y}{k} \right)^2 \left(k_* - \frac{\text{sh } k_* (b_* - 1) \text{ch } k_*}{\text{ch } k_* b_*} \right) + \omega_{*1}^2 \right], \quad (1),$$

$$\omega_*^2 = \text{th } k_* \left[\left(\frac{k_y}{k} \right)^2 \left(k_* - \frac{\text{ch } k_* (b_* - 1) \text{ch } k_*}{\text{sh } k_* b_*} \right) + \omega_{*1}^2 \right], \quad (2),$$

$$\omega_*^2 = \text{cth } k_* \left[\left(\frac{k_y}{k} \right)^2 \left(k_* - \frac{\text{ch } k_* (b_* - 1) \text{sh } k_*}{\text{ch } k_* b_*} \right) + \omega_{*1}^2 \right], \quad (3),$$

$$\omega_*^2 = \text{cth } k_* \left[\left(\frac{k_y}{k} \right)^2 \left(k_* - \frac{\text{sh } k_* (b_* - 1) \text{sh } k_*}{\text{sh } k_* b_*} \right) + \omega_{*1}^2 \right], \quad (4).$$

Здесь $\omega_* = \omega/\omega_0$, $\omega_0^2 = B_0^2/\mu_0 \rho a^2$, $k_* = ka$, $b_* = b/a$, $\omega_{*1}^2 = k_* (Ak_*^2 - B)$, $A = \sigma_{\text{II}}/a^3 \omega_0^2$, $B = G(a)/a \omega_0^2$.

3. Решение для струй, ограниченных в y -направлении. В рассмотренном выше случае ориентированных в x -направлении полос перетяжки не приводят к усилению магнитного поля и, следовательно, развитию неустойчивости. Ранее [4] был рассмотрен представляющий практический интерес случай, когда сечения струй сильно вытянуты, но ограничены в y -направлении и вдоль широких сторон струй в x -направлении распространяются малые возмущения вида

$$\xi = \dot{\xi}(z) \exp(\omega t + ikx). \quad (15)$$

В этом случае из-за сокращения длины силовых линий при появлении возмущений вида (15) имеют место неустойчивости типа перетяжек с инкрементом:

$$\begin{aligned} \omega_*^2 = & \frac{k_*}{b_* \Delta_{*1} \text{sh } k_*} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\mu_n^2 \frac{\text{sh}^2 k_*}{\text{ch } k_*} \left(\frac{M_n \sin^2 \mu_n}{\mu_n^3 b_n^2} - \frac{N_n \cos^2 \mu_n}{a_n^5} \right) + \right. \\ & + 2k_* \mu_n \text{sh } k_* \sin \mu_n \cos \mu_n \left(\frac{M_n}{\mu_n^3 b_n^2} + \frac{N_n}{a_n^5} \right) - \\ & \left. - k_*^2 \frac{\sin^2 \mu_n}{\text{ch } k_*} \left(\frac{2M_n}{\mu_n^3 b_n^2} + \frac{N_n \text{ch}^2 k}{a_n^5} \right) \right] \end{aligned}$$

Здесь $\omega_0^2 = \mu_0 j_0^2/\rho$, $\mu_n = \pi b_*^{-1} (n + 1/2)$, $a_n^2 = \mu_n^2 + k_*^2$, $b_n^2 = \mu_n^2 + 4k_*^2$, $M_n = 1 - \exp(-2\mu_n \Delta_{*1})$, $N_n = 1 - \exp(-2a_n \Delta_{*1})$, $2\Delta_1$ — размер струи в y -направлении.

4. Результаты численных расчетов. На рис. 4 и 5 оценивается время разрушения свинцовой системы струй с $r_1 = 0,5$ м, $r_2 = 1,5$ м, образо-

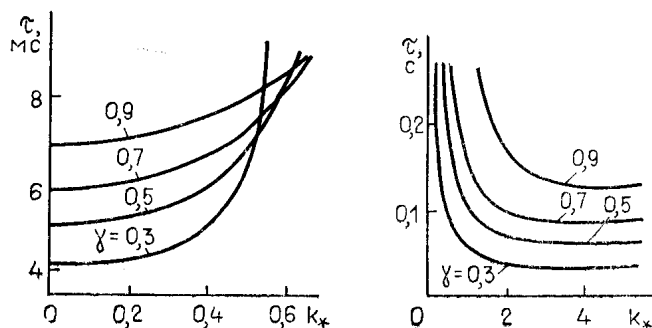


Рис. 4. Зависимость времени разрушения струи неустойчивостью типа перетяжек от волнового числа.

Рис. 5. Зависимость времени разрушения струи неустойчивостью типа разбиения на струйки от волнового числа.

ванной 48 струями, при различных коэффициентах заполнения γ и при фиксированном поле $B_0 = 1$ Т неустойчивостями обоих видов, описанных в предыдущих пунктах.

Наиболее опасны неустойчивости типа 2 (рис. 4), причем характерное время $\tau = \omega^{-1}$ существования системы струй слабо зависит от коэффициента заполнения $\gamma = a/b$ камеры жидкометаллическими струями, составляя величину, близкую к $\tau = 5$ мс. При этом в системе струй неустойчивость больше, чем для уединенной струи. Последнее можно объяснить усилением возмущений магнитного поля в случае 2, что приводит к усилению периодической и знакопеременной по y составляющей электромагнитной силы в y -направлении, вызывающей поперечные выпучивания электропроводной жидкости. Для неустойчивостей типа перетяжек, описанных в предыдущем пункте, $\tau = 50$ мс.

Выводы. 1. Получены аналитические зависимости, описывающие магнитное поле системы, образованной рядом равномерно распределенных по окружности жидкометаллических струй, по которым протекают токи, имеющие в соседних струях противоположные направления.

2. Проведены расчеты магнитных полей для радиальных и слабо-изогнутых струй. Показано, что характер распределения поля по радиусу в обоих случаях одинаков, причем распределение поля не имеет минимума по радиусу.

3. Получены аналитические зависимости, позволяющие оценить время радиального разлета струй и рассчитать инкременты различных МГД-неустойчивостей (МГД-неустойчивости, приводящие к разделению на отдельные струйки, МГД-неустойчивости типа перетяжек).

4. Оценка времени существования системы струй по полученным аналитическим зависимостям дает для рассмотренных параметров величину $\tau \approx 5 \dots 10$ мс.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Архангельский Ю. И., Волков В. П., Муравьев Е. В., Недосеев С. Л., Романов П. В., Рудаков Л. Н., Рютов В. Д., Цыганков Е. А., Шаталов Р. Е. Условия работы конструкционных материалов в импульсном термоядерном реакторе на релятивистских электронных пучках. — Вопросы атомной науки и техники. Сер. Термоядерный синтез, 1979, вып. 1(3), с. 39—51.
2. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 735 с.
3. Галант В. Е., Жилинский А. П., Сахаров С. А. Основы физики плазмы. М.: Атомиздат, 1977. 384 с.
4. Поклонский Е. В., Элькин А. И. Об устойчивости системы токонесящих струй с чередующимися по направлению токами. — Магнитная гидродинамика, 1982, № 4, с. 39—45.

Поступила:
первоначально 20 октября 1983 г.,
в окончательной редакции 25 февраля 1985 г.