

УДК 537.84

Г. М. Гехт, В. И. Морозова

ТЕЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОЙ ЖИДКОСТИ В СКРЕЩЕННЫХ ПОСТОЯННОМ И ПЕРЕМЕННОМ МАГНИТНЫХ ПОЛЯХ

Рассмотрим задачу о развитии течения электропроводной жидкости в прямоугольном контейнере с непроводящими стенками с поперечным сечением $2a \times 2d$, помещенном в скрещенных постоянном и переменном магнитных полях $\mathbf{V}(B_1(t), 0, B_0)$, причем переменное магнитное поле направлено вдоль оси контейнера. Подобные вопросы рассматривались в [1].

Если продольный размер контейнера значительно больше поперечного, то движение жидкости можно считать прямолинейным и не учитывать концевых эффектов. Таким образом, имеется только одна компонента скорости $\mathbf{u}(u(z, y), 0, 0)$, течение предполагается безградиентным, а результирующее магнитное поле в канале имеет вид $\mathbf{V}(B_1(t) + b(t, y, z), 0, B_0)$. Перейдя к безразмерным величинам $\tilde{d} = d/a$; $\tilde{z} = z/a$; $\tilde{y} = y/a$; $\tilde{u} = u/v_0$; $\tilde{t} = t/T_0$; $\tilde{B}_1 = B_1/B_0$; $\tilde{b} = b/(RmB_0)$; $v_0 = \alpha/T_0$; $\tilde{B}_{10} = B_{10}/B_0$, где T_0 — характерное время изменения магнитного поля, получаем систему уравнений (тильда в дальнейшем опущена), описывающую течение:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{Re} \Delta u + St \frac{\partial b}{\partial z}; \quad Rm \frac{\partial b}{\partial t} = \Delta b + \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial B_1}{\partial t}; \quad j_y = -\frac{\partial b}{\partial z}; \quad j_z = -\frac{\partial b}{\partial y}. \quad (1), (2)$$

Комплексы St , Re и Rm построены по величине v_0 . Условия симметрии задачи позволяют рассматривать только область $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq d$, задав на осях симметрии граничные условия

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = 0; \quad \left. \frac{\partial b}{\partial y} \right|_{y=0} = 0; \quad u|_{z=0} = 0; \quad \left. \frac{\partial b}{\partial z} \right|_{z=0} = 0. \quad (3)$$

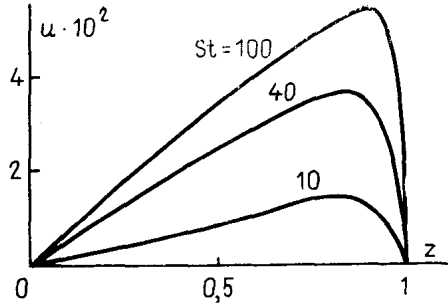


Рис. 1. Распределение скорости на оси контейнера при $t=0,6$, $Re=10$, $Rm=10$.

Начальные и граничные условия на стенках контейнера имеют вид

$$u|_{t=0}=b|_{t=0}=0; \quad b|_{z=d}=u|_{z=d}=0; \quad b|_{z=1}=u|_{z=1}=0. \quad (4)$$

Система (1) с граничными условиями (3), (4), записанная в векторной форме

$$A \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} = B \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial y^2} + B \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial z^2} + C \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial z} - \mathbf{F}, \quad (5)$$

где

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} u \\ b \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Rm \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1/Re & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 0 & St \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ \partial B_1 / \partial t \end{pmatrix};$$

$$w|_{y=1}=0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0; \quad w|_{z=d}=0; \quad A_1 w|_{z=0} + A_2 \frac{\partial w}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0; \quad (6)$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad w|_{t=0}=0,$$

решалась конечно-разностным методом.

Производная по времени в (5) аппроксимировалась односторонними разностями вперед

$$A \frac{\mathbf{w}^{n+1} - \mathbf{w}^n}{\Delta t} = B \frac{\partial^2 \mathbf{w}^{n+1}}{\partial y^2} + B \frac{\partial^2 \mathbf{w}^{n+1}}{\partial z^2} + C \frac{\partial \mathbf{w}^{n+1}}{\partial z} - \mathbf{F}^{n+1},$$

где \mathbf{w}^n , \mathbf{w}^{n+1} — значения вектор-функции на n -м и $(n+1)$ -м шагах по времени соответственно, причем \mathbf{w}^n считается известным с предыдущего шага. Для определения \mathbf{w}^{n+1} на каждом шаге по времени проводится итерационный процесс, являющийся процессом установления по некоторому фиктивному времени τ . Аппроксимация уравнения (5) с добавленным фиктивным членом $\partial \mathbf{w}^{n+1} / \partial \tau \rightarrow 0$ осуществлялась в соответствии с неявной схемой переменных направлений [2]. Решение полученной системы конечно-разностных уравнений с учетом граничных условий (6) проводили методом матричной прогонки.

Результаты расчетов при $d=6$ сопоставлялись с аналитическим решением одномерной задачи о течении электропроводной жидкости в случае $d \gg 1$ и пренебрежением индуцированных полей для случая $B_1 = B_{10} e^{-t}$. При значениях $Rm=0,1$ различие составляло не более 1%, что говорит о высокой точности метода.

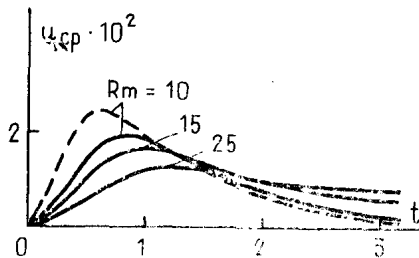


Рис. 2. Зависимости $u_{cp}(t)$ при $Re=10$ и $St=100$ (---) и 40 (—).

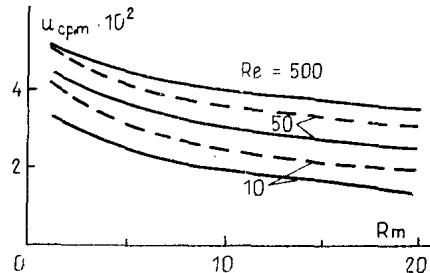


Рис. 3. Зависимости $u_{cpm}(Rm)$ при $St=100$ (---) и 40 (—).

Дальнейшие расчеты проводили для случая $d=1$; $B_1=B_{10}e^{-t}$; $B_{10}=0,1$. Распределения скорости на оси $y=0$ ($u(y, z)=-u(y, z)$) показаны на рис. 1. На рис. 2 представлены зависимости от времени величины $u_{ср} = d^{-1} \int_0^1 \int_0^d u(y, z, t) dy dz$, характеризующие развитие течения. Величина $u_{ср}$ сначала увеличивается до $u_{ср m}$, а затем убывает, так как силы вязкости становятся больше, чем электромагнитные. На рис. 3 показаны зависимости $u_{ср m}$ от Rm при различных значениях St и Re . Увеличение Rm приводит к уменьшению скин-слоя и, следовательно, к понижению $u_{ср m}$.

Описанная модель дает возможность оценить давление на стенки контейнера, связанное с движением жидкости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Walker I. S., Wells W. M. Stresses in liquid modules in a tokamak blanket due to a changing poloidal magnetic field // Proc. 8th Sympos. Eng. Problems of Fusion Research. — 1979. — Vol. 1. — P. 394...397.
2. Роч П. Вычислительная гидродинамика. — М., 1980. — 616 с.

Магнитная гидродинамика. —
1989. — № 2. — С. 143...145

Поступило в редакцию 20.06.88