

А. Гайлитис

**ГЕНЕРАЦИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ ОСЕСИММЕТРИЧНЫМИ
ТЕЧЕНИЯМИ ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ В СФЕРИЧЕСКОЙ
ПОЛОСТИ НЕПОДВИЖНОГО ПРОВОДНИКА. 2**

A. Gailitis

Institute of Physics, Latvian Academy of Sciences, Salaspils-1, LV-2169, Latvia

**MAGNETIC FIELD GENERATION BY AXISYMMETRIC FLOW
OF A CONDUCTING FLUID IN A SPHERICAL CAVITY OF A CONDUCTING
MEDIUM AT REST. 2**

Magnetic field generation by distributed flow having polynomial stream function in a uniform conducting medium has been considered. It has been found that the simplest meridional flow in a form of two contacting ring vortices generates a steady magnetic field. Critical value of Rm and field pattern have been calculated. If the surface velocities are directed towards equator an equator dipole type field is generated. If they are directed towards the poles the field is of quadrupole type.

Настоящая статья является продолжением предыдущей публикации [1], в которой рассматривался пространственно неограниченный неподвижный проводник со сферической полостью единичного радиуса ($R = 1$), заполненной жидкостью с той же электропроводимостью σ , что и проводник. Изучались три типа аксиально-симметричных течений этой жидкости на предмет самопроизвольной генерации магнитного поля. История вопроса была изложена в [1]. Для двух типов течений (одиночного кольцевого вихря с азимутальным вращением и пары несоприкасающихся кольцевых вихрей без азимутального движения) был установлен факт генерации. Для третьего, математически простейшего, типа течения (пары соприкасающихся кольцевых вихрей без азимутального движения) точность расчета оказалась недостаточной для определенного суждения. В настоящей работе продолжено изучение третьего типа течения. Точность расчетов улучшена и подтвержден факт генерации.

Постановка задачи. Рассматривается аксиально-симметричное течение несжимаемой жидкости \mathbf{v} в полости ($r \leq R = 1$), в сферических координатах r, θ, φ заданное выражениями

$$v_r/v_{\max} = r(1 - r^2)(3 \cos^2 \theta - 1); \quad v_\theta/v_{\max} = r(5r^2 - 3) \sin 2\theta/2, \quad v_\varphi = 0. \quad (1)$$

Картина течения (см. рис 1 [1]) является математически простейшим течением с полиномиальной (в цилиндрических координатах) функцией тока и топологией двух соприкасающихся кольцевых вихрей. Найдем значение $Rm = \mu_0 \sigma v_{\max} R$, при котором возбуждается стационарное неосесимметричное магнитное поле \mathbf{B} . В силу аксиальной симметрии течения сферические составляющие поля экспоненциально зависят от азимута φ

$$B_r, B_\theta, B_\varphi \sim \exp(im\varphi). \quad (2)$$

Изучим случай $m = 1$. В принципе, постановка задачи не отличается от описанной в [1]. Поле представлено полоидальной и тороидальной составляющими, которые разлагаются по сферическим угловым функциям

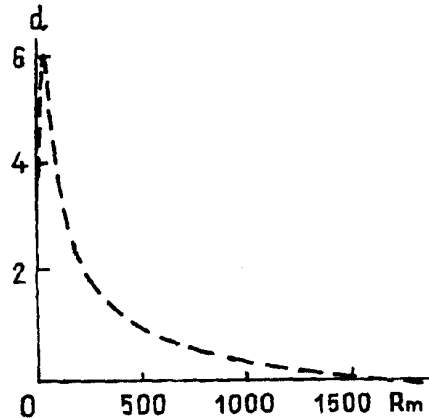


Рис. 1. Ток $d(Rm)$, пропускаемый по поверхности полости, необходимый для поддержки нормированного поля в ее центре (предельная кривая).

Fig. 1. Exciting current $d(Rm)$ at cavity surface required to support the normalized field (limiting curve).

$P_l^m(\cos \theta) \exp(im\phi)$. Из уравнений индукции возникает бесконечная система радиальных дифференциальных уравнений, которая обрывается на каком-то максимальном $l = l_{\max}$ и интегрируется численно.

Специфика рассматриваемого явления — численно большое значение критического $Rm \sim 10^3$. Для его вычисления требуются $l_{\max} \sim 100$ и несколько сот шагов интегрирования по радиусу. Большое Rm делает обычные схемы интегрирования неустойчивыми и приходится пользоваться методом релаксации [2], сводящим интегрирование к решению весьма большой системы линейных алгебраических разностных уравнений.

Все уравнения в точности те же, что в [1], и здесь не повторяются. Как и в [1], для вычисления критического Rm вводится промежуточная величина $d(Rm)$, представляющая собой “электрический ток, который необходимо пропускать по поверхности полости для поддержки нормированного поля в центре ее”. Критическое Rm определяется как корень уравнения $d(Rm) = 0$, означающего, что при самовозбуждении ток поддержки не нужен.

Уточнение расчета. Настоящая работа отличается от [1] прежде всего существенным повышением l_{\max} . В [1] этому препятствовала перегрузка памяти ЭВМ промежуточными данными, в частности “матрицей обратной подстановки”. В данной работе структура матрицы изменена, что позволяет хранить ее в памяти (RAM) по частям, которые можно удалять из памяти по мере использования для вычисления $d(Rm)$. Это оказалось возможным, поскольку $d(Rm)$ входит в уравнения линейно и его уточнение не требует проведения релаксационных итераций — снижаются только ошибки округления, которые, как показывает опыт [1], при расчете с удвоенной точностью незначительны. Вся матрица обратной подстановки в целом необходима для построения карты поля, при этом случае используется дисковая память. Расчет проведен на Gateway 2000 (486/33) — несколько меньшей ЭВМ, использованной в [1].

Второе отличие касается порядка вычислений. Из-за длительности расчета нет практической возможности выбрать столь большой l_{\max} и столь малый шаг радиального интегрирования h , чтобы ошибками обрывания и интегрирования можно было просто пренебречь.

В [1] уравнение $d(Rm, l_{\max}, h) = 0$ решалось для ряда l_{\max} и h , а графической экстраполяции на предел $l_{\max} \rightarrow \infty$, $h \rightarrow 0$ подвергался сам корень Rm . В настоящей работе сначала уточняется $d(Rm)$, а критическое Rm вычисляется уже как корень предельной кривой $d(Rm) = 0$ (рис. 1).

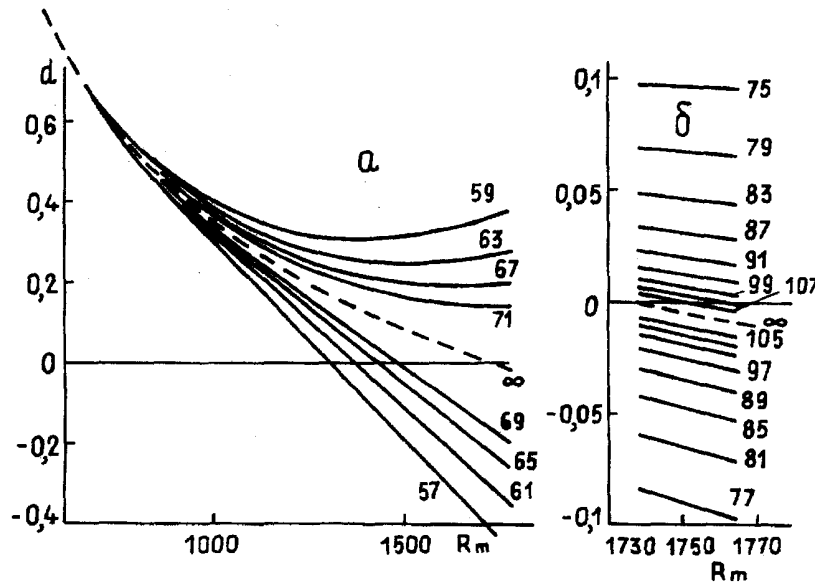


Рис. 2. Сходимость вычисленных $d(Rm)$ к предельной кривой по мере роста l_{\max} . Значения l_{\max} указаны на кривых.

Fig. 2. Convergence of computed curves to the limiting one as l_{\max} is growing. Values of l_{\max} are indicated at the curves.

Для построения этой кривой первым совершается предел $h \rightarrow 0$. Фиксируя l_{\max} , радиус делится на n равных шагов интегрирования и вычисляется $d(Rm)$ для трех значений n . Вместо графической экстраполяции предельное для $n = \infty$ значение $d = d(n = \infty)$ вычисляется, исключая поправки a и b , из трех уравнений

$$d(n) = d + a/n^2 + b/n^4; \quad n = n_1, n_2, n_3. \quad (3)$$

(Метод релаксации [2] использует аппроксимацию низкого — второго — порядка, где ведущая поправка квадратична по $h \sim 1/n$, нечетные поправки отсутствуют, ибо разностные уравнения не меняются при изменении знака h , т.е. направления интегрирования.)

По мере роста l_{\max} кривые $d(Rm)$ образуют пучок (рис. 2), медленно сходящийся к предельной кривой. При построении рис. 2а принимали $n_1 = 100$; $n_2 = 150$; $n_3 = 200$ (в левой части) и $n_1 = 150$; $n_2 = 200$; $n_3 = 300$ (для нескольких точек в его правой части), а при построении рис. 2б — $n_1 = 200$; $n_2 = 300$; $n_3 = 600$.

Параметр обрыва l_{\max} увеличивался до тех пор, пока существование корня $d(Rm, l_{\max}) = 0$ не становилось очевидным. Предельная кривая проводится по пределам средних взвешенных значений

$$\bar{d}_1 = 1/16 d_{1-4} + 1/4 d_{1-2} + 3/8 d_1 + 1/4 d_{1+2} + 1/16 d_{1+4} \quad (4)$$

из пяти соседних l_{\max} и пересекает ось при

$$Rm = 1734,95 \pm 0,01. \quad (5)$$

(Положительные значения Rm в использованной системе координат соответствуют движению, на поверхности полости направленному к экватору.)

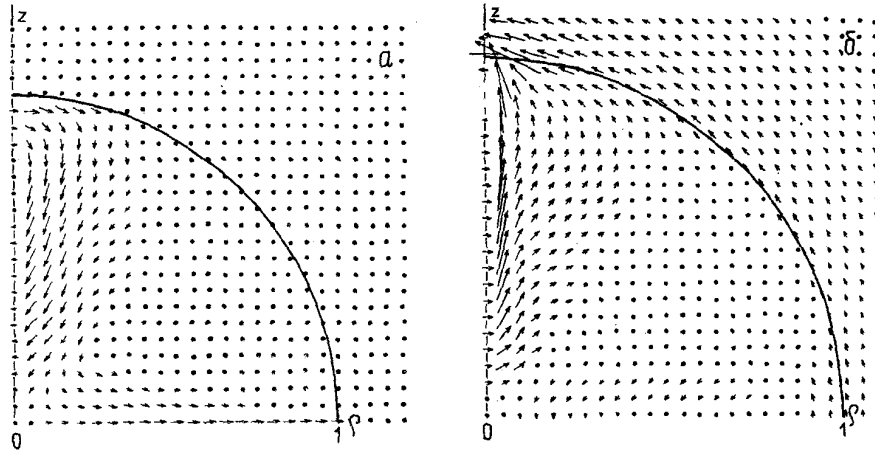


Рис. 3. Картина меридиональных составляющих магнитного поля при течении от полюсов к экватору (а) и от экватора к полюсам (б). Направление и длина стрелок указывают направление и численное значение поля.

Fig. 3. Pattern of magnetic field meridional components when movement is from poles to equator (a) and from equator to poles (b). The direction and length of the arrows corresponds to those of the magnetic field vector.

На карте меридиональных составляющих возникающего магнитного поля (рис. 3а) видно, что возбуждается поле типа диполя, перпендикулярного оси симметрии. Качественно поле похоже на поле, возбуждаемое парой несоприкасающихся вихрей (см. [1], рис. 6), только в меньшей степени выходит наружу. Поле сильнее прижато к оси и к экваториальной плоскости. Достоверное отображение тонкого экваториального слоя (рис. 4) требует много сферических функций. Небольшие приповерхностные осцилляции поля, по-видимому, объясняются несовершенством процедуры обрыва, так как период осцилляций соответствует отброшенной сферической функции.

Для поля квадрупольного типа (рис. 3б) аналогичный расчет дает

$$Rm = -1734,9 \pm 0,5.$$

Знак минус означает, что решение соответствует генерации поля при обратном направлении течения, когда по поверхности полости жидкость течет к полюсам. Равенство абсолютных значений требуется теоремой

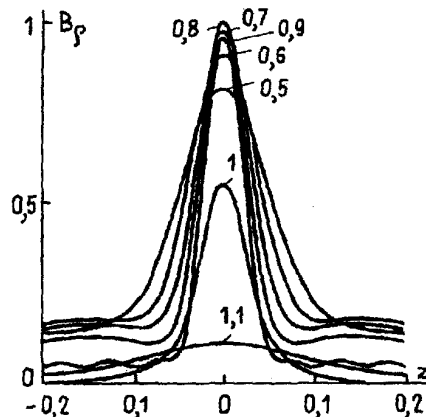


Рис. 4. Структура экваториального слоя в цилиндрических координатах — радиальное поле на различных радиусах ρ в зависимости от высоты z . Значения ρ указаны на кривых.

Fig. 4. Structure of equatorial layer in cylindrical frame — radial magnetic field versus axial distance z at different radii ρ . Values of ρ are indicated at the curves.

Проктора [3, 4]. Совпадение вычисленных значений является аргументом в пользу правильности счета.

Таким образом, течение, определяемое выражениями (1), можно считать наипростейшим чисто меридиональным осесимметричным течением, генерирующим магнитное поле.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гайлитис А.* Генерация магнитного поля осесимметричными течениями проводящей жидкости в сферической полости неподвижного проводника // *Магнит. гидродинамика.* — 1993. — № 2. — С. 3—14.
2. *Press W. H., Flannery B. P., Teukolsky S. A., Vetterling W. T.* Numerical Recipes. — Cambridge, CUP, 1986. — 818 p.
3. *Proctor M. R. E.* On the Eigenvalues of Kinematic α -effect Dynamos // *Astr. Nachr.* — 1977. — Vol. 298. — P. 19 — 25.
4. *Proctor M. R. E.* The Role of Mean Circulation in Parity Selection by Planetary Magnetic Fields // *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* — 1977. — Vol. 8. — P. 311 — 324.

Поступила в редакцию 17.06.94